La Géométrie des Socles de Compétences
en Communauté Française de Belgique

La Géométrie des Transformations du Plan et de l'Espace

ou

Solides et Figures Géométriques
Mouvements Naturels Idéalisés du Plan et de l'Espace

La philosophie

"A quelle géométrie faut-il préparer les enfants dès le primaire?"

A cette question, nous répondons: "A la géométrie décrite dans les Socles de Compétences", c'est à dire, à la géométrie qui relie les propriétés des transformations aux propriétés des objets géométriques.
En effet, à la page 28 des Socles de Compétences de la Communauté Française de Belgique, il est précisé que : *"…Des manipulations et l'observation d'objets, de dessins, contribuent à caractériser des transformations du plan. Agrandir, réduire des figures associent un phénomène géométrique à la notion de proportionnalité…*
…on compare les propriétés des familles de figures, <u>on les relie</u> à celles des transformations. On en arrive ainsi à enchaîner des énoncés et on apprend progressivement à démontrer."

Cette dernière recommandation signifie qu'il ne suffit plus de découvrir <u>séparément</u> les propriétés des objets géométriques et les propriétés des transformations; encore faut-il les relier entre-elles afin de pouvoir enchaîner des énoncés et apprendre progressivement à démontrer.

Scientifiquement, le concept géométrique qui permet de réaliser le rapprochement entre les propriétés des objets et les propriétés des transformations se nomme **"symétries au sens large"** ou encore **"automorphismes"** et recouvre la notion simple de **"transformations qui superposent un objet à lui-même, tout en conservant la structure (les caractéristiques) de celui-ci."**

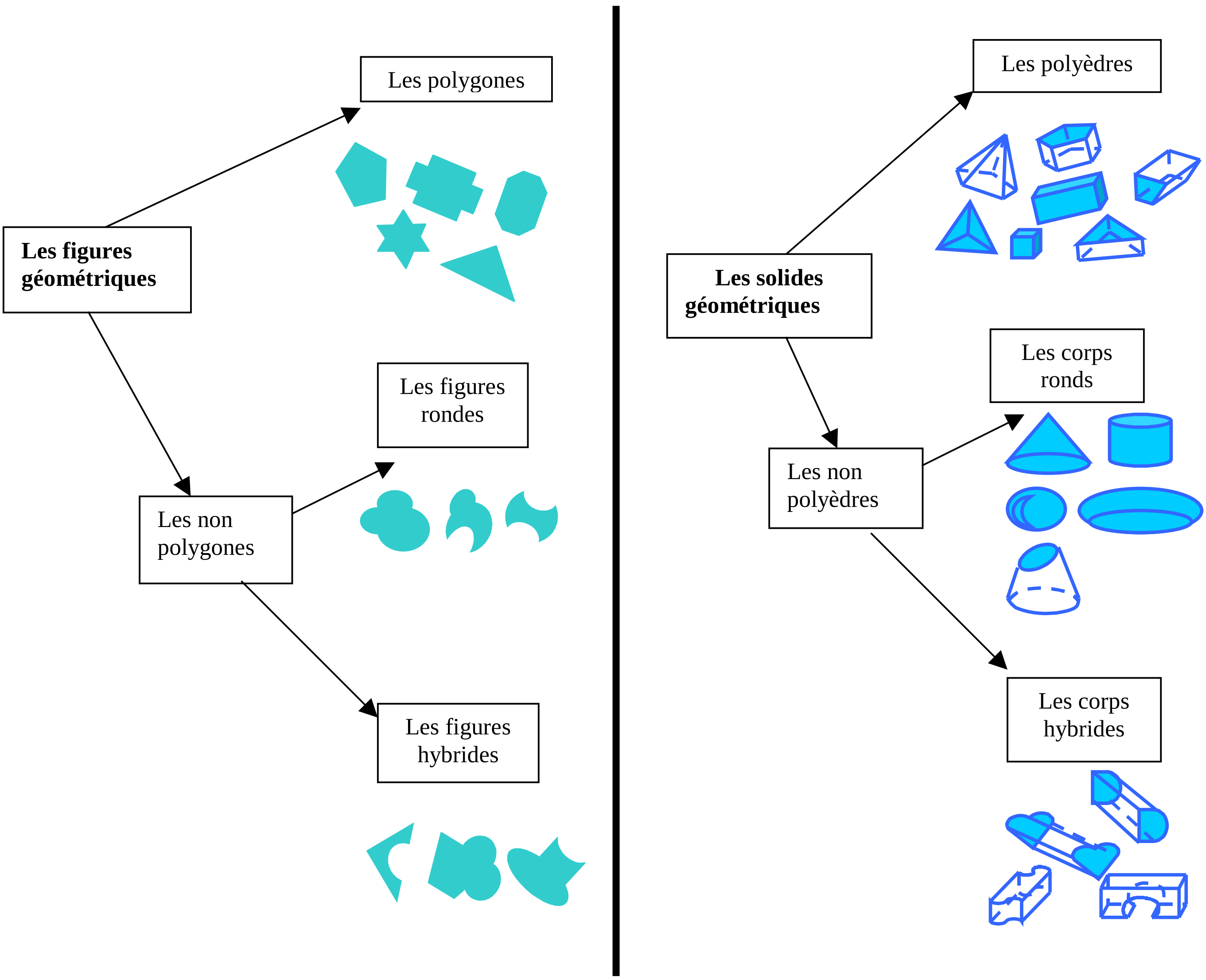
La géométrie qui relie les propriétés des transformations aux propriétés des objets géométriques s'appelle "La Géométrie des Transformations" et prend ses origines dans les développements des géométries dites non-euclidiennes et de la théorie des groupes.
Sa crédibilité scientifique et son équivalence à l'étude des objets géométriques proposée par Euclide sont bien connues depuis le fameux programme d'Erlangen de Félix Klein (1872).
Dans cette géométrie, les transformations sont perçues comme des outils qui permettent, grâce à leurs propriétés, de:
- découvrir et/ou démontrer les propriétés des objets géométriques du plan et de l'espace;
- créer des figures ayant des régularités "répétitives" (frises – rosaces – tapisseries);
- classer des objets du plan et de l'espace;
- percevoir si un objet est orientable ou non orientable (paires d'objets énantiomères - formes "gauche" ou "droite" d'un objet - molécules chirales)

Cette géométrie se définit succinctement comme *" l'étude des objets géométriques du plan et de l'espace par les transformations"*.

En Géométrie élémentaire, par *"Solides et Figures Géométriques"* on entend les figures et les solides idéalisés sur lesquels peut aisément se construire une première activité géométrique structurée et cohérente.

Les schémas ci-joints illustrent:
- les premiers classements des figures géométriques et des solides géométriques rencontrés dès le début du primaire;
- l'analogie naturelle existant entre le classement des figures géométriques et des solides géométriques.

Classements des figures et des solides géométriques



Par *"Transformations du Plan ou de l'Espace"*, on entend les mouvements naturels idéalisés sur lesquels s'élabore la Géométrie des Transformations de base.

Par *"Mouvements naturels idéalisés"*, on entend les mouvements qui conservent la forme des objets du plan ou de l'espace.
Ces mouvements naturels se scindent en trois types; chacun de ceux-ci se subdivise aussi en deux sous-types:
1°) les mouvements (les transformations) qui *agrandissent proportionnellement et déplacent* les objets ou qui *agrandissent proportionnellement et retournent* les objets. On parle, dans ces deux cas, *d'objets semblables agrandis déplacés* et *d'objets semblables agrandis retournés.*

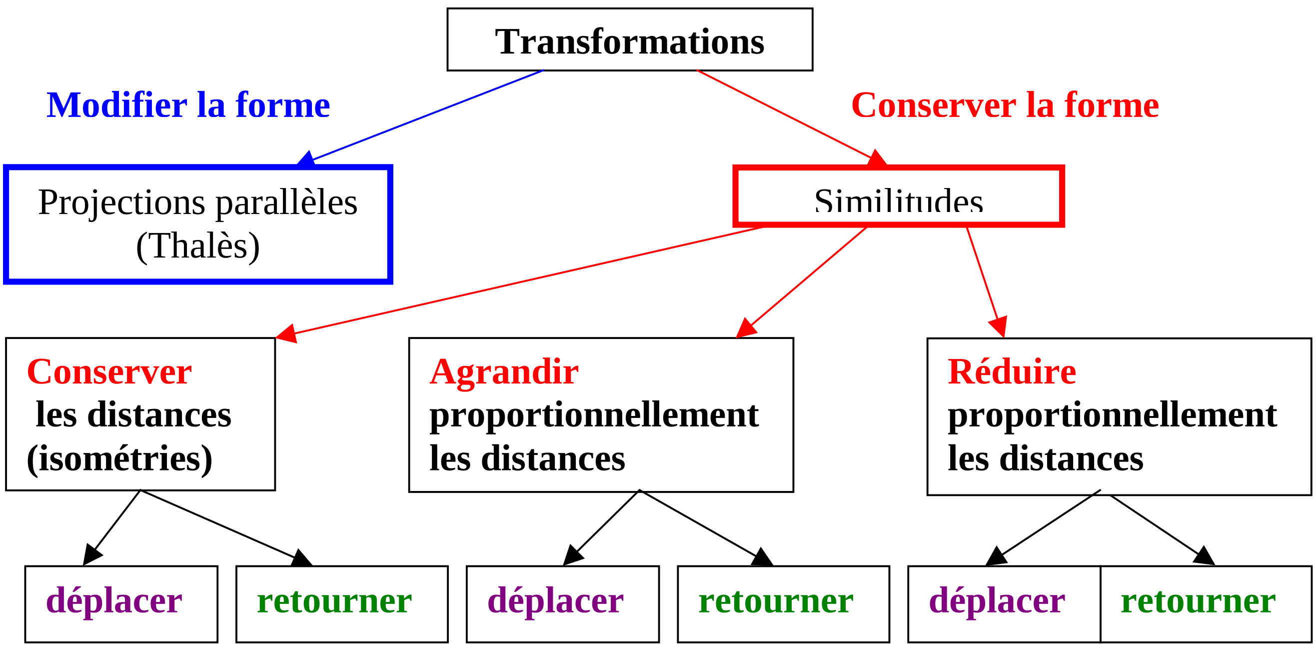
2°) les mouvements (les transformations) qui *réduisent proportionnellement et déplacent* les objets ou qui *réduisent proportionnellement et retournent* les objets.
On parle, dans ces deux cas, *d'objets semblables réduits déplacés* et d'objets semblables réduits retournés.

3°) les mouvements (les transformations) qui *conservent les distances et déplacent* les objets ou qui *conservent les distances et retournent* les objets.
On parle, dans ces deux cas, *d'objets semblables isométriques déplacés* et *d'objets semblables isométriques retournés.*

Les projections solaires (parallèles) sont également rencontrées comme des mouvements naturels.
Nous attirons l'attention sur le fait que la Géométrie des Transformations que nous proposons est dès lors naturelle puisqu'elle est basée sur la notion simple de mouvements "réels" idéalisés (mathématisés).

Le schéma ci-après résume cette description des transformations utilisées en géométrie des Transformations de base.

Structure des transformations en géométrie élémentaire



Comme déjà indiqué ci-devant, parmi tous les concepts propres à la Géométrie des Transformations et indispensables à l'étude des objets géométriques, celui de *"figure superposable à elle – même"* ou de symétries[1] au sens large permet de relier les propriétés des objets aux propriétés des transformations.

A ce propos, nous ne pouvons que citer la récente déclaration du prix Nobel de chimie 1996 Harry W. KROTO[2] ainsi que celle de H. FREUDENTHAL sur l'importance de cette notion.

HW. KROTO:" Les modèles de symétrie sont intrinsèques à tous les aspects de la perception et semblent jouer un rôle essentiel dans les processus créatifs à la fois en sciences et en arts. Sans une conscience de l'importance de tels concepts abstraits pour les réponses cathartiques qui étayent l'effort humain, il est douteux que les présentes tentatives désespérées faites en vue d'améliorer la quantité et la qualité des relations (en recherche scientifique et développement ou en arts) ne conduisent à rien d'autre que l'échec".

H. FREUDENTAL: " Pourquoi les groupes sont-ils si énormément importants en mathématique ? La réponse peut être brève : les groupes sont importants parce que les automorphismes (les symétries au sens large) de quelque structure que ce soit forment un groupe, le groupe des automorphismes de cette structure, et que tant peut être appris sur la structure même à partir de ses automorphismes.

Bien que non présente, comme outil géométrique, dans le cours du premier degré de l'enseignement Primaire, cette notion de "symétrie au sens large" ou d'automorphisme est une des particularités nouvelles essentielles que nous proposons dès la troisième année de l'enseignement fondamental et ce, dans le but de créer une continuité et une cohérence dans la formation géométrique des élèves.

Les autres particularités essentielles que nous proposons sont:
1. la familiarisation des enfants du Fondamental aux concepts de déplacements et de retournements de figures avant de caractériser ceux-ci en termes de symétries orthogonales, de translations, de rotations ou de symétries centrales.
2. l'utilisation des notions conservées par les déplacements et les retournements dans l'étude des objets géométriques.
3. l'emploi de l'orientation du plan (cercles horlogiques et antihorlogiques) et des types de dessins de mains sur transparents pour distinguer les déplacements des retournements du plan.
4. l'emploi des types de mains pour distinguer les déplacements des retournements de l'espace.
5. le classement des polyèdres convexes en fonction de la régularité des faces et des sommets (Polyèdres réguliers - Polyèdres semi réguliers).

[1] Les symétries au sens large ou les automorphismes d'une figure sont les transformations qui superposent cette figure à elle-même tout en conservant la structure de celle-ci. A titre d'exemple, les automorphismes d'un carré sont les 4 rotations de 90°- 180°- 270°- 360° de centre "0" ainsi que les 4 symétries orthogonales dont les droites de points fixes sont les diagonales et les médianes.
[2] KROTO est un des découvreurs de la molécule de carbone 60 conduisant aux fullerènes et aux nanotubes.

Au cours de nos démarches pédagogiques, nous avons privilégié l'exploration de familles de figures géométriques et de familles de solides géométriques qui sont étudiés en relation avec leur construction et les "opérations"(transformations géométriques) que l'on peut leur appliquer.

Les définitions rencontrées dans tous nos documents se sont évidemment pas "plaquées" comme telles. Elles sont découvertes pas à pas dans des situations vécues qui éveillent la curiosité des élèves, sont sources d'observations, de recherches, de tâtonnements, d'analyses, de discussions, d'émissions de propositions, de mises en doute, de vérifications et d'argumentations.
La méthodologie ainsi suivie amène les élèves à la maîtrise de la démarche scientifique.

Le cours proposé

1. résulte d'expériences de "terrain" et d'un travail d'équipe dans lequel œuvrent des professeurs de tous les niveaux de l'enseignement (Primaire – Secondaire – Supérieur et Universitaire). Tous, par leurs connaissances, leur enthousiasme, leur compétence et leur expérience ont collaboré à son élaboration. Parmi toutes ces personnes, le rôle de monsieur Francis BUEKENHOUT (Professeur Ordinaire à l' U.L.B. et Académicien) a été déterminant par ses apports théoriques, didactiques, son soutien et la garantie scientifique qu'il a apportée en qualité de géomètre de niveau international.
2. se base sur les principes méthodologiques et didactiques actuels, en particulier sur les principes de l'enseignement en spirale et génétique chers à J.S. BRUNER et à E. WITTMANN ainsi que sur les méthodologies liées aux situations-problèmes et aux solving-problèmes.

Intérêt de la Géométrie des Transformations.

La géométrie réclamée par les Socles de Compétences (ainsi que par nombre de scientifiques) n'est pas un jeu gratuit de l'esprit créé comme alternative à la géométrie d'EUCLIDE.
Il s'agit de familiariser et de préparer les enfants aux concepts et principes nécessaires pour aborder, comprendre et maîtriser les diverses composantes de la mathématique.
De plus, elle prépare aussi aux concepts théoriques indispensables à d'autres domaines tels que : la cristallographie, la chimie, la physique, la mécanique rationnelle, la biologie, les arts, les polyèdres de GRÜNBAUM, la régularité (au sens de TITS), les polytopes…

Les formidables potentialités de la Géométrie des Transformations sont d'ailleurs largement illustrées

- dans le numéro spécial de « Pour la Science » de juillet 1998, sur « Les Symétries de la Nature » ;
- dans l' exposé fait à l' Académie Royale des Sciences de Belgique par F.BUEKENHOUT (U.L.B.) sur "La symétrie, les groupes de transformations et la géométrie" , le 15/12/2001;
- sur le poster publié par " Sciences Infuses" (U.C.L.) sur l' importance de la notion de symétrie au sens large (les automorphismes[3]) en sciences en général.

Signalons que nos propositions et réalisations de Géométrie des Transformations pour l' Enseignement nous ont valu deux Médailles d' Or:

- La Médaille d' Or du Rayonnement Culturel au titre de l' Enseignement de "La Renaissance Culturelle Française" sous le haut patronage du Ministère des Affaires Étrangères, de l' Intérieur, de la Défense et de l' Éducation Nationale - Paris, le 22 novembre 2001.
- La Médaille d' Or au titre de l' Enseignement de "Renaissance Culturelle Européenne"- "Europese Culturele Renaissance" - Bruxelles, le 15 décembre 2001.

[3] automorphismes: transformations qui superposent une figure à elle-même.