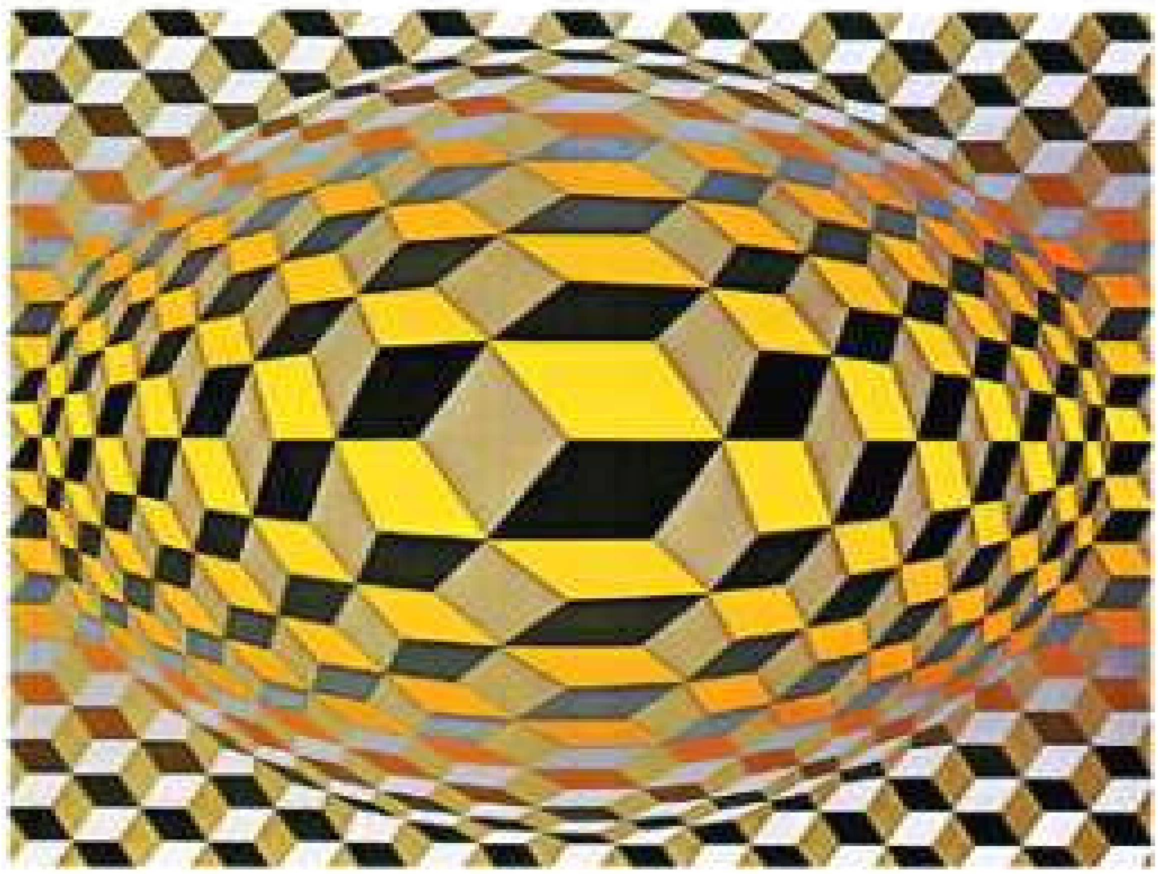
Parlement de la Communauté française

Rapport introductif

« L'apprentissage de la mathématique »



Session 2004 – 2005

Maurice BAYENET, Député

Table des matières

AVANT-PROPOS

A Bastien et Pierre-Antoine, mes « canailloux » …

- Papy, on veut une glace !!
- Une glace, mes chéris … ?
- Oui, une glace avec deux boules ! Une à la banane et une au chocolat …
- Vous voulez une grosse boule ?
- Non, on veut les deux mêmes …

Mes deux « canailloux » partent à la conquête de leur monde, le quantifient, établissent des relations, manipulent des grandeurs … bref, un peu comme *Monsieur Jourdain*, ils font, eux, de la mathématique sans le savoir.
Pour se faire comprendre des autres, ils oralisent, ils affinent leur langage …

- Bientôt, vous allez tous les deux entrer à la « grande école ». Vous allez apprendre beaucoup de choses : mieux parler … lire … écrire …, même d'autres langues que le français.
Vous allez apprendre à compter, à compter plus encore, jusqu'à mille, mille fois plus même.
Vous saurez calculer, vous saurez résoudre des problèmes.
Le monde des grands aujourd'hui, c'est difficile. Demain, il n'aura plus de secret pour vous.
Les grands, ils sont parfois bien compliqués …
Les grands ? Ils n'ont pas toujours raison …

Mes canailloux, je vais vous raconter une histoire …

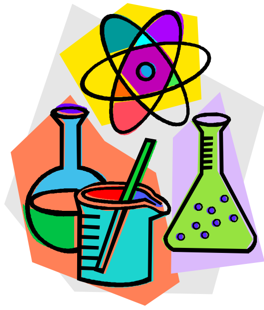
Il était une fois …

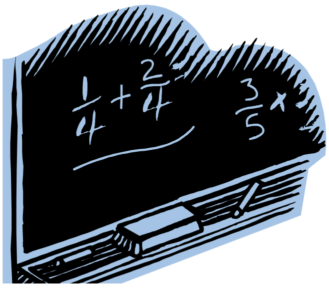
dans un pays magique …

trois personnages …

Le premier, il écrit des histoires pour les petits enfants dans un beau cahier bleu, avec une grande plume … c'est Monsieur le Poète.

Le deuxième, avec son chapeau pointu, il travaille toute la journée dans une remise. Il fait des mélanges avec des bouteilles de toutes les couleurs … c'est Monsieur le Physicien.





Le troisième est un vieux Monsieur, avec une très grande barbe grise, pleine de poussière blanche. Il travaille sur un grand tableau noir rempli de chiffres, de signes, de lignes droites, courbes, … c'est Monsieur le Mathématicien.

Aujourd'hui, Monsieur le Poète, Monsieur le Physicien et Monsieur le Mathématicien partent tous les trois en train pour explorer le pays magique …

Par la fenêtre du train, ils aperçoivent un mouton noir dans une étrange prairie …

- Je vois que les moutons du pays magique sont aussi noirs que l'encre de ma plume ! dit Monsieur le Poète.

- Tous les moutons du pays magique ne sont pas forcément noirs ! lui répond sèchement Monsieur le Physicien.

- Non, c'est vrai ! dit calmement Monsieur le Mathématicien. Mais je suis certain en regardant ce mouton qu'il y a au moins un mouton dans le pays magique et qu'au moins un côté de ce mouton est noir …

- Et mon petit doigt me dit, mes canailloux, que vous avez trouvé qui a raison …

A votre avis ?

C’est Monsieur le Poète, Monsieur le Physicien ou bien Monsieur le Mathématicien ?

Alors, vous avez trouvé … ? Les grands, pas tous ! Ils manquent parfois de bon sens.

Ce bon sens mes canailloux, l’apprentissage de la mathématique vous le donnera plus encore et fera de vous des grands qui sauront, avec raison, bien parler, lire, écrire et calculer.

Car c’est de raison, mes canailloux, dont vous aurez le plus besoin quand vous serez grands …

PREAMBULE

Ce rapport introductif sur l'apprentissage de la mathématique que j'ai l'honneur de soumettre au débat parlementaire n'a pas la prétention d'être exhaustif et encore moins celle de vous donner la clef d'une quelconque solution.
Tout au plus a-t-il l'ambition de tenter d'apporter un éclairage sur l'importance de la question et de susciter le plus haut intérêt sur la nécessité d'y apporter une réponse.

C'est volontairement que, plus haut, j'ai employé le mot « solution ». Car en mathématique, qui dit solution, dit problème à résoudre.

Et si j'ai choisi d'emblée les cartes de la tendresse et de l'humour en avant-propos de ce rapport, c'est en grande partie pour démythifier le sujet.

Mathématique vient du grec μαθημα (mathêma) : science, connaissance, apprentissage.
L'adjectif mathématique qualifie quant à lui tout objet, concept ou terme relatifs aux mathématiques. Le substantif, lui, désigne la science des mathématiques et, dans ce cas, est le plus communément employé au pluriel.

On peut parler de LA mathématique pour souligner que les diverses composantes de celle-ci (algèbre, analyse, géométrie, …) sont des façons différentes d'étudier ou de créer des systèmes structurés par des relations.
Dans cette optique, la mathématique est vue comme un édifice à construire ou à reconstruire.
Personnellement, c'est ce terme employé au singulier qui me semble le mieux traduire l'idée première de véritable science d'entre toutes les sciences que constitue LA mathématique.

Un préjugé reste tenace : croire que la mathématique n'est qu'une branche obscure de la connaissance réservée à une espèce d'élite. Le savoir de ces « Nostradamus » reposerait uniquement sur la seule maîtrise des nombres, des formes géométriques, des grandeurs, des théorèmes, des équations et autres algorithmes.
Ce préjugé est amplifié chez certains par le douloureux souvenir de bulletins scolaires décevants en la matière.

Combien de fois n'entend-on pas des réflexions du genre « Oh, moi les maths, je n'y ai jamais rien compris et je n'y comprendrai jamais rien … », parfois même émises avec une certaine fierté ?

Alors que notre société moderne continue à progresser dans toutes les sciences, la culture mathématique semble échapper à de très nombreux adultes, même fort savants dans d'autres domaines de la connaissance. Mathématiquement parlant, il s'agit-là d'un paradoxe.

D'où vient cette aversion, cette difficulté à comprendre, à assimiler le langage mathématique pour beaucoup ? Lui qui se veut pourtant binaire, cartésien, logique, raisonné. Lui qui sert à la compréhension et à la maîtrise des autres sciences, donc du monde qui nous entoure. Lui qui nous aide à conquérir notre environnement. Lui qui aide à choisir entre l'utile et le superflu, entre le vrai et le faux, entre le bien et le mal, … bref, lui qui guide la raison en l'éclairant, par le bon sens et pour le bon sens.

« Le bon sens est la chose du monde la mieux partagée. »[1]

Bon sens et raison : tout au long de son histoire, étape par étape, grâce à sa faculté de raisonner, l'Homme s'est distancé de l'animal en cherchant à conquérir le monde qui l'entoure.
Depuis des siècles, compter, mesurer, peser, tracer, construire, … ont toujours été autant d'activités propres à tous les peuples. Observer, comprendre, expliquer (c'est-à-dire raisonner) ces techniques, pour les transmettre aux générations suivantes, a été tout aussi indispensable à l'Homme pour assurer la survie de son espèce.
De même, sans le raisonnement, les actions de lire, écrire et calculer sont dénuées de sens. En effet, à quoi bon savoir lire ce que l'on ne comprend pas, savoir écrire ce que personne ne lira ou savoir calculer ce qui ne sert à rien du tout ?

« Science sans conscience n'est que ruine de l'âme. »[2]

La mathématique est précisément définie par le dictionnaire comme étant la discipline qui étudie, par le moyen du raisonnement déductif, les propriétés des êtres abstraits (nombres, figures géométriques, etc.) ainsi que les relations qui s'établissent entre eux.

Sans la mathématique, les grandes pyramides d'Egypte, les cathédrales, le chemin de fer, l'électricité, le téléphone, l'automobile, l'aviation, la télévision, l'ordinateur, la conquête de l'Espace, … n'auraient jamais pu voir le jour.

Un simple regard autour de nous permet d'observer l'omniprésence de la mathématique dans notre vie quotidienne. Sans même y penser, nous y avons sans cesse recours : les achats dans les magasins, les retraits d'argent au distributeur automatique, le plein de carburant, la durée du stationnement, le partage entre convives d'une note de restaurant, l'utilisation efficace de notre ordinateur, l'étalement cohérent de notre emploi du temps, la proportion des ingrédients pour la préparation des repas, etc. …

Tant nos actions les plus anodines que les avancées technologiques de notre société en perpétuel progrès réclament de notre part une connaissance toujours plus grande de la logique, donc de la mathématique. Comme Monsieur Jourdain fait de la prose sans le savoir, nous utilisons la mathématique sans même plus nous en rendre compte.

Alors quoi ? Les maths, ces mal aimées ? Pourquoi ? De qui ? La faute à qui ?

« Il n'y a pas de problème. Il n'y a que des professeurs. »[3]

La faute aux profs alors ?

[1] René DESCARTES (1596 – 1650). Extrait du *Discours de la Méthode* (1637).
[2] François RABELAIS (1494 – 1553).
[3] Jacques PREVERT (1900 – 1977).

Ce serait là leur faire un très injuste procès.

A cet égard, je me réjouis d'avoir reçu la précieuse collaboration d'un groupe d'experts en mathématique, constitué de femmes et d'hommes de terrain qui ont toutes et tous accepté avec talent, générosité, enthousiasme et gentillesse de m'aider à l'établissement de ce rapport.
Qu'il me soit ici permis de les féliciter et de les remercier pour l'excellence de leurs travaux.

Enseigner, transmettre un savoir est sans aucun doute un exercice fort difficile.
Indépendamment des aptitudes inégales de chaque élève face à l'apprentissage de quelle que matière que ce soit, il faut en tout premier lieu que l'enseignant maîtrise lui-même son sujet.
Mais cette maîtrise n'est rien tant que l'on ne possède pas les techniques de la pédagogie nécessaires à la transmission de son savoir.
Psychologie, motivation, méthode, rigueur, philosophie, disponibilité, attention, compréhension, objectivité, tolérance, indulgence, patience, … sont autant d'autres qualités que se doivent de posséder les enseignants.

Reconnaissons que ce qu'il est convenu d'appeler le « corps enseignant » est, dans sa grande majorité, constitué de femmes et d'hommes aux qualités professionnelles et humaines requises pour la fonction. Avant d'être un métier, l'enseignement est d'abord une vocation.

Si problème il y a, celui-ci semble résider plus dans l'absence de cohérence de l'apprentissage de la mathématique et dans le manque d'uniformisation et de continuité de la matière enseignée dès la plus jeune enfance dans chaque réseau scolaire.
Mais il demeure que la formation pédagogique des enseignants, clef indispensable de la réussite, reste perfectible.

Les sciences en général, et la mathématique en particulier, constituent un outil fondamental pour le progrès de l'humanité. Elles permettent en tout premier lieu d'inculquer un esprit de rationalité, une pensée logique, un sens critique de remise en question perpétuelle, une capacité à pouvoir sérier la pléthore d'informations auquel l'individu de demain sera confronté bien plus encore que celui d'aujourd'hui. La condition indispensable à l'Homme pour qu'il trouve son équilibre dans la société est la maîtrise de cet outil mathématique.

En tant que représentants des citoyens, l'un de nos devoirs les plus élémentaires est, me semble-t-il, de débattre ce sujet ô combien essentiel pour les générations actuelles et futures.

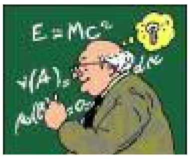
« Les techniques de raisonnement regroupées sous le terme de mathématiques représentent un outil d'une telle efficacité que son usage se révèle nécessaire dans toutes les branches de la connaissance.
Son apprentissage doit donc être entrepris le plus tôt possible et conduit de telle façon que, loin de rebuter, il provoque l'appétit de toujours aller plus loin.
Ce qui est d'autant plus facile qu'il peut être présenté comme un jeu.
Comble de contresens, dans l'enseignement, les maths sont présentées comme un obstacle à franchir et utilisées comme un instrument de sélection … »[1]

[1] Albert JACQUART (1925 -).

CHAPITRE 1 : LA MATHEMATIQUE A TRAVERS L'HISTOIRE

« Le mathématicien est un oiselier capturant dans une volière des oiseaux aux brillantes couleurs. »[1]

Depuis la nuit des temps, les hommes ont éprouvé le besoin de compter et d'écrire le résultat de leurs cogitations.

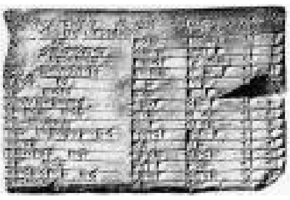


1, 2, 3, 4, 5, 6, ………………………… **$E = m\,c^2$!**

Comment en est-on arrivé là ?

Pour répondre à cette question, nous devons voyager dans le temps et dans l'espace. On trouve déjà à l'ère paléolithique des marques sur des supports de bois permettant de conserver les nombres. L'évolution de nos chiffres aura duré plus de 10 000 ans.

Au départ, il n'y a pas de chiffres, rien que nos dix doigts. Mais l'homme arrive assez vite au bout de ses dix doigts et pour aller au-delà il a besoin d'éléments qu'il trouve dans la nature. Les cailloux lui sont très utiles mais ils deviennent vite encombrants. L'homme comprend alors que des marques gravées sur une tablette suffisent pour compter : c'est le début de l'écriture des nombres… nous sommes en 3 500 avant J.C., en Mésopotamie (aujourd'hui l'Irak).



On a retrouvé également des tablettes cunéiformes montrant que les Babyloniens utilisaient (plus de 2 300 ans avant J.C.), pour le calcul des circonférences, le nombre $3 + 1/8$ comme multiplicateur du diamètre et qu'ils savaient résoudre des équations du second degré.

La géométrie naît des exigences de la vie pratique. C'est aux crues répétées du Nil dans l'Egypte des pharaons que l'on attribue les origines de la géométrie. Elles obligent les arpenteurs égyptiens à retracer régulièrement les limites des propriétés agricoles afin de redistribuer les terrains de façon équitable. Ces arpenteurs utilisaient la corde à 13 nœuds.

Si notable que soit la contribution d'un grand nombre de civilisations de l'Antiquité au progrès de la mathématique, l'apport de la civilisation grecque est incomparablement supérieur.
En Grèce antique, l'histoire de la mathématique se confond avec l'histoire générale de la pensée.
La création mathématique des grecs anciens procède essentiellement d'un idéal de pensée désintéressé, d'un souci de rationalité, de logique dont ARISTOTE devait apporter la formulation la plus élaborée. On comprend alors la rigueur et l'esprit de synthèse qui marquent la mathématique grecque.

Les premiers pas se font avec THALES DE MILET (fin du VIIème siècle avant J.C.). Il a rapporté d'Egypte en Grèce les fondements de la géométrie et a été le premier à calculer avec exactitude la hauteur de la grande pyramide de Chéops. Il énonce de nombreux théorèmes. PYTHAGORE (VIème siècle avant J.C.) lui emboîte le pas. On lui doit la table de multiplication, le système décimal, le théorème du carré de l'hypoténuse, …

[1] PLATON (428 – 348/347 avant J.C).

Vers le III^{ème} siècle avant J.C., les formules géométriques se démontrent. Deux écoles marquent cette période : les Pythagoriciens et l'Ecole d'Alexandrie (EUCLIDE, ARCHIMEDE, …).

Au II^{ème} siècle après J.C., PTOLEMEE induit les débuts de la trigonométrie.

Au Moyen Age, les grands mathématiciens sont surtout arabes : AL KHWARISMI (auteur du premier traité d'algèbre) et AL KASHI (généralisation du théorème de Pythagore).

Pour l'histoire de la mathématique, comme d'ailleurs pour l'histoire en général, la Renaissance se divise en écoles nationales ayant chacune son style propre : l'école allemande (plus formaliste que créatrice), l'école italienne et l'école anglaise.

Le XVII^{ème} siècle nous offre de grands moments de créations mathématiques. Cinq grands noms se détachent : DESCARTES (création de la géométrie analytique), FERMAT, PASCAL (étude des coniques), LEIBNIZ et NEWTON (bases du calcul infinitésimal).

Après un XVIII^{ème} siècle de transition (néanmoins marqué par les travaux d'EULER, de LAGRANGE et de GAUSS), le siècle suivant voit un essor considérable dans le domaine de la mathématique. Dès la fin de la Révolution française, un style nouveau de la mathématique, marqué essentiellement par un souci de plus grande rigueur, par un esprit de conquête et par la recherche d'une généralité toujours plus grande, va s'affirmer. Ainsi la mathématique reposera sur des bases plus solides et son véritable caractère apparaîtra avec le développement de l'axiomatisation et l'introduction du concept de structure abstraite. Les différentes composantes de la mathématique, jusqu'alors assez disparates, se réorganiseront selon des perspectives qui conduiront à une meilleure mise en évidence de leurs interactions fondamentales. Des périodiques mathématiques voient le jour. Les grands noms sont légion : CAUCHY, ABEL, GALOIS, RIEMANN, JACOBI, KLEIN, …. Tous s'imposent par l'ampleur et la profondeur de leurs vues novatrices.

Au début du XX^{ème} siècle, la France meurtrie par la première guerre mondiale a peu de mathématiciens d'envergure. Aussi, de jeunes normaliens prennent le chemin de l'Allemagne et fondent à leur retour en France le groupe BOURBAKI[1].

En Allemagne, après de brillantes années, la mathématique allemande est détruite en deux ans par les nazis dès 1933 (exode des juifs, des démocrates, des intellectuels, des savants, …).
On assiste alors au phénomène inverse : beaucoup de scientifiques et de mathématiciens allemands partent vers la France, la Suisse, l'Angleterre ou les Etats-Unis. Parmi ceux-ci, le plus célèbre est sans conteste Albert EINSTEIN.

Aujourd'hui, dans nos sociétés modernes, l'informatique est omniprésente. Nul doute que les grands mathématiciens qui se sont succédés à travers toute l'histoire auraient magnifiquement utilisé un tel outil.

Terminons ce bref aperçu historique par une citation de G.-H. HARDY[2] (mathématicien anglais du XX^{ème} siècle) :

« Les schémas du mathématicien, comme ceux du peintre ou du poète, doivent être beaux ; les idées comme les couleurs ou les mots, doivent s'assembler de façon harmonieuse. La beauté est le premier test : il n'y a pas de place durable dans le monde pour les mathématiques laides ».

---

[1] BOURBAKI (Nicolas), pseudonyme collectif sous lequel de jeunes mathématiciens français entreprirent, dès 1939, la refonte de la mathématique en la prenant à son point de départ logique.
[2] Cf. bibliographie en annexe.

CHAPITRE 2 : L'IMPORTANCE DE L'ENSEIGNEMENT DE LA MATHEMATIQUE

2.1. Importance de l'enseignement de la mathématique dans la formation des élèves

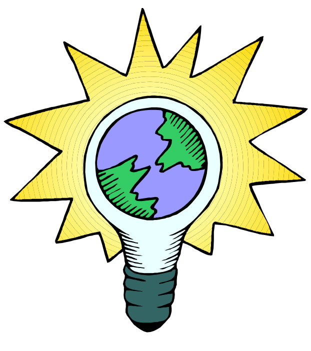
« Sans la science, on ne peut rien comprendre aujourd'hui au monde moderne.
Rien n'est plus important que de donner aux jeunes l'éducation (scientifique) dont ils ont besoin, qui fera d'eux des hommes et des femmes libres, capables de comprendre l'Univers qui les entoure et sa signification.
Il le faut, d'urgence, avant que des gourous, des marchands, des adorateurs de légendes ou des illuminés aient le temps de s'emparer d'eux.
Qu'ils aient des savants le vrai savoir … »

Georges CHARPAK et Roland OMNES[1]

« L'Enseignement a de nombreuses fonctions, mais la plus éminente est de permettre de rendre le monde intelligible. L'école apporte des moyens de réduire l'apparente complexité du réel, et les mathématiques ont pour le faire un rôle important et de deux façons :

- *d'abord, elles apportent des outils très puissants, extraordinairement efficaces : beaucoup de choses du réel peuvent se représenter par des nombres ou par des concepts géométriques ;*
- *mais de façon plus profonde, les mathématiques sont précieuses à l'école parce qu'elles donnent confiance : elles apportent la conviction qu'il est possible de comprendre, et en même temps la jubilation de cette compréhension. »*

André ADOUTTE[2]



2.1.1. L'enjeu

Il est clair que la formation à l'esprit scientifique des jeunes est une exigence pour le futur et une responsabilité de notre société.
Or, la mathématique représente le premier enseignement à caractère scientifique que rencontrent les enfants.

Si, dès l'abord, les élèves ont des difficultés en mathématique, ils risquent d'éprouver une aversion pour l'ensemble des branches scientifiques.

[1] Extrait de « Soyez savants, devenez prophètes » - édition Odile JACOB.
Georges CHARPAK est prix Nobel de physique et physicien au CERN (France).
Roland OMNES est physicien et professeur émérite à la Faculté des Sciences de Paris XI – ORSAY.
[2] Biochimiste français (1947 – 2002).

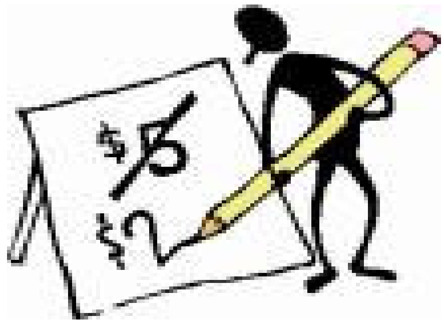
Pourtant, comme l'indiquait déjà en 1998 le rapport du programme européen FAST (Forecasting and Assessment in the Field of Science and Technology) : *« au fur et à mesure de la diffusion des technologies, il deviendra impératif que de larges couches de la population soient familiarisées avec leur utilisation et avec les enjeux de société que soulèvent ces technologies.*
La maîtrise du changement technique, à savoir l'usage de celui-ci conformément à des objectifs politiques ou éthiques établis démocratiquement, implique une large diffusion d'une culture générale scientifique et technique ainsi que l'acquisition du savoir-faire par le plus grand nombre.

Il revient au système d'enseignement d'assurer cette nouvelle formation générale. Une alphabétisation scientifique et technologique constituerait un moyen pour maîtriser les risques de marginalisation et de dualisation sociale. »

Les sciences et la mathématique en particulier constituent non seulement un outil fondamental pour faire progresser la technologie, mais elles permettent aussi d'inculquer aux individus un esprit de rationalité, une pensée logique, un sens critique de remise en question perpétuelle.

Nous savons qu'un des problèmes auxquels l'individu sera confronté demain est l'abondance démesurée d'informations et la nécessité de pouvoir les sérier, les structurer, les remettre en question.
Comme l'exposait I. STENGERS* :

« L'enseignement des sciences est trop souvent un enseignement de la soumission, alors que la première valeur de la science, celle qui devrait lui donner un statut culturel majeur, est son rôle d'empêcheur de penser en rond. »



2.1.2. L'importance de l'activité mathématique dans la formation des élèves dès l'enseignement primaire

Si la mathématique est indispensable à la formation des élèves et si elle peut s'appréhender dès le plus jeune âge, elle ne doit pas se résumer à de simples activités descriptives telles que l'observation, la description ou la manipulation locale d'objets ; elle doit s'entendre comme une véritable activité mathématique.

Décrire l'activité mathématique en quelques lignes semble fort hasardeux pour ne pas dire utopique. L'idéal serait sans doute de développer un nombre important d'exemples, plus ou moins simples, pour saisir le sens du travail en mathématique. Néanmoins, tout en étant conscients d'être fort lacunaires, citons quelques auteurs qui ont analysé et défini la notion d'activité mathématique.

B. GOLDFARB* et J. THEPOT* précisent que le travail mathématique se décompose en deux phases distinctes, complémentaires, qui se succèdent continuellement : une phase inductive et une phase déductive.

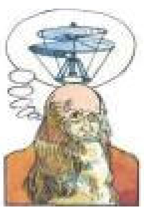
Au cours de la phase inductive, le mathématicien donne libre cours à son imagination, observe, manipule, compare, construit, dessine afin d'émettre une ou des propositions pour mettre ensuite en

* Cf. bibliographie en annexe.

doute celle(s)-ci. Dans la phase déductive, il justifie la véracité éventuelle des propositions émises et les enchaîne d'une manière rigoureuse à partir de prémisses soigneusement formulées.
Comme l'indique J. DIEUDONNE* : *« Le terrain que l'intuition a conquis ainsi d'un seul bond, il reste ensuite à l'organiser, à bâtir maillon par maillon la chaîne de propositions qui aboutira au résultat recherché. »*

F. BUEKENHOUT* propose quant à lui une autre définition de l'activité mathématique : *« La mathématique consiste en un traitement par le cerveau d'informations qui peuvent provenir de l'extérieur ou de la mémoire de l'individu. Ce traitement doit être efficace, c'est-à-dire faire progresser les questions posées en apportant une solution ou en les remplaçant par d'autres questions jugées plus satisfaisantes ; ce traitement se fait sans apport extérieur d'information, c'est-à-dire avec les seules ressources du cerveau : imagination, raisonnement, mémoire, observation, sens critique, ... ; ce traitement est abstrait et général en ce sens qu'il cherche à dégager des structures et des méthodes susceptibles de s'appliquer à des problèmes quelque peu différents de celui qui a été à l'origine du travail accompli. »*

Ces différentes citations mettent en évidence la richesse de l'activité mathématique qui exige à la fois le recours au raisonnement logique, mais également à l'imagination.



Comme le souligne G. POLYA*, la première exigence, celle de rigueur et de capacités logiques, s'exerce principalement dans la phase déductive. Mais il met aussi en évidence l'importance du raisonnement plausible comme moteur de la découverte de propositions. C'est ici que s'exerce principalement toute la puissance des facultés de création et d'imagination. Dans son livre ***« Les mathématiques et le raisonnement plausible »***, il écrit :

« Nous assurons la validité de nos connaissances mathématiques par un raisonnement démonstratif, tandis que nous justifions nos hypothèses par des raisonnements plausibles. Une preuve mathématique est un exemple de raisonnement démonstratif, mais la preuve inductive du physicien, la preuve de l'homme de loi, la preuve de l'historien appartiennent au raisonnement plausible.

Le raisonnement démonstratif est sûr, à l'abri des controverses et définitif. Le raisonnement plausible est hasardeux, provisoire et peut-être controversé. Le raisonnement démonstratif a des règles rigides, codifiées et clarifiées : la logique formelle ou démonstrative qui est la théorie du raisonnement démonstratif. Les règles du raisonnement plausible sont mouvantes et il n'en existe aucune théorie qu'on puisse accaparer.

On considère les mathématiques comme constituant une science démonstrative, mais ce n'est là qu'un de ses aspects. Les mathématiques achevées, présentées sous forme définitive, paraissent purement démonstratives et ne comportent que des preuves. Mais les mathématiques en gestation ressemblent à toute autre connaissance humaine au même stade de développement. Le résultat du travail créateur du mathématicien est un raisonnement démonstratif, une preuve ; mais la preuve est découverte par un raisonnement plausible, elle est d'abord devinée. Il faut certainement apprendre à démontrer, mais aussi apprendre à deviner. Je ne pense pas qu'il existe une méthode pour apprendre à deviner. L'utilisation efficace du raisonnement plausible est ***affaire de pratique****, on l'apprend par imitation et par habitude.*

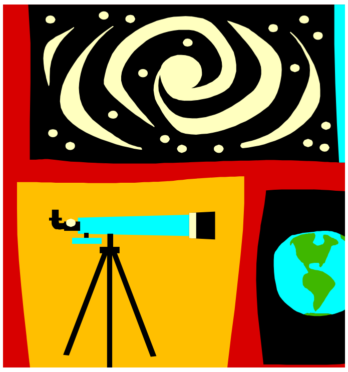
* Cf. bibliographie en annexe.

L'étudiant moyen doit aussi goûter au raisonnement démonstratif : sans doute n'aura-t-il que rarement l'occasion de s'en servir directement, mais il doit acquérir un élément de comparaison qui puisse lui permettre de juger les prétendues preuves de toutes sortes qui lui sont offertes dans le monde où nous vivons actuellement. Par contre, dans tout ce qu'il entreprendra, il aura besoin du raisonnement plausible.

Bien entendu, enseigner la démonstration aux élèves des classes de mathématiques est, sans aucun doute, une chose désirable. Mais ne leur apprendre que des démonstrations pourrait être moins désirable si l'on cache aux élèves, systématiquement, que les théorèmes démontrés aujourd'hui furent devinés autrefois et si on leur cache aussi les raisons inductives ou analogiques qui peuvent provoquer la découverte, on ne leur rend pas le meilleur service, on ne les éclaire pas suffisamment. »

2.1.3. Conquérir son environnement

Comme toutes les autres disciplines de la science, la mathématique est au service de la conquête de l'environnement.



Dans cette conquête, un levier fantastique consiste donc à partir d'un problème issu des réalités du milieu à condition, bien entendu, d'en dégager progressivement un modèle mathématique, modèle qui, une fois bien acquis, constituera à son tour un outil supplémentaire afin de mieux appréhender d'autres réalités.

Situation de vie ► Modèle mathématique ► Autre situation de vie

Dans l'apprentissage en général, et en mathématique en particulier, le recours aux réalités du milieu reste indispensable, très souvent comme point de départ et toujours comme point d'arrivée, mais ces réalités ne prennent une signification profonde qu'en fonction des abstractions qui les dématérialisent (les modèles mathématiques) et les abstractions n'ont de valeur qu'en fonction des réalités qui les réincarnent. Ce n'est qu'en ce sens qu'une pédagogie s'avère fonctionnelle.

D'aucuns trouvent certaines situations d'apprentissage puisées dans le réel très artificielles, trop complexes, et parlent à leur propos de pédagogie peu fonctionnelle par manque de motivation psychologique chez l'enfant.

Effectivement, la complexité peut être un frein et ce schéma idéal n'est pas toujours applicable. C'est alors que l'enseignant aura recours à l'un ou l'autre subterfuge. Il présentera dès lors des situations dépouillées des éléments perturbants, donc des situations « préfabriquées » au départ du milieu ou de matériels dits structurés de manière à mettre en évidence malgré tout, et c'est le but, un modèle mathématique à dégager.

Forts de cet enseignement, les enfants entreront de plain-pied dans ces situations imaginaires ou adaptées pour autant que l'enseignant ne les trompe pas par de fallacieux prétextes, leur présente ces activités comme des jeux exigeant le respect de certaines règles et, une fois le but atteint, retourne aux situations de vie afin d'y appliquer la notion mathématique acquise.

Cette démarche se schématisera alors comme suit :

Situation d'apprentissage ► Modèle mathématique ► Situation de vie

En résumé et quel que soit celui des deux schémas précités qui est mis en œuvre, le but ultime de l'apprentissage de la mathématique dans l'enseignement fondamental est de donner aux enfants le pouvoir d'appliquer à des situations de vie inédites les modèles mathématiques découverts, ce qu'on appelle le transfert ou la COMPETENCE, c'est-à-dire cette

« aptitude à mettre en œuvre un ensemble organisé de savoirs, de savoir-faire et d'attitudes permettant d'accomplir un certain nombre de tâches. »

Plus les modèles seront variés et mieux ils seront élaborés, plus l'action sur le réel sera puissante et rentable.

En conséquence, la mission pédagogique de l'enseignant consistera, le but étant fixé, à trouver des moyens appropriés pour amener l'enfant à dégager des modèles mathématiques choisis et à les mobiliser pour, rappelons-le, **conquérir son environnement**.

2.1.4. Raisonner dès l'enseignement primaire

Si l'expression orale, la lecture, l'écriture et le calcul sont des bases « premières » dans l'enseignement fondamental, il en est une, tout aussi essentielle et pourtant souvent oubliée à l'école primaire, c'est le « *raisonnement* ».

Sans le raisonnement, les actions de « lire, écrire et calculer » n'ont guère d'efficacité, ni de sens dans la perspective d'une formation efficiente et harmonieuse des enfants.

Bien qu'ignorées par un grand nombre de personnes, des expériences telles que celles réalisées par l'Américain F. ULMER[*] ont montré que le *« raisonnement logique »* n'est en aucun cas inné chez l'individu moyen et qu'une initiation, dès le début de la formation, est indispensable pour se l'approprier. Cela est d'ailleurs rappelé dans les Socles de Compétences.

ULMER a également montré que grâce à la matérialisation possible de la quasi totalité des concepts géométriques, le cours de géométrie est celui qui permet le mieux, dès l'enseignement primaire, de familiariser progressivement et naturellement les très jeunes enfants aux principes et règles du raisonnement logique (cartésien).

[*] Cf. bibliographie en annexe.

2.1.5. L’importance de la géométrie dans la formation mathématique de base des élèves

Si les nombres, les grandeurs, l’algèbre, l’analyse, les problèmes utilitaires, … sont bien évidemment fondamentaux dans la formation mathématique des élèves, nous souhaitons attirer l’attention des enseignants et des responsables pédagogiques sur le rôle primordial et moteur que la géométrie joue, dès l’enseignement fondamental, dans l’appropriation et la maîtrise de la démarche scientifique par les élèves.

Les principales difficultés qu’éprouvent les élèves en mathématique se rencontrent dans les cours de géométrie. Pourtant, la géométrie est une matière fondamentale pour la formation des individus et c’est aussi la branche de la mathématique qui est la plus accessible aux enfants.
En effet, comme le souligne H. FREUDENTHAL* : *« La géométrie, c’est saisir l’espace »*.

C’est donc l’activité qui est la plus directement issue des objets de la vie quotidienne puisque nous vivons dans un monde où des formes multiples se manifestent.

La géométrie est le premier cours qui permet le mieux de passer du concret à l’abstrait.
Il est plus facile, pour les enfants, de partir de situations réelles (non nécessairement utilitaires) qu’ils vivent et comprennent pour apurer ensuite les concepts, les réduire à leurs éléments essentiels, les formaliser.

C’est également une discipline qui sollicite l’ensemble de la personne : représentation dans l’espace, sens de l’orientation, de l’observation, de l’analyse, esprit déductif, esprit critique, …
Bien sûr, si la géométrie part du vécu de l’élève, elle ne se cantonne pas à ce vécu. Les recherches en pédagogie de la mathématique montrent d’ailleurs qu’il est souhaitable de partir de situations relativement complexes afin de faire se dégager progressivement les concepts sous-jacents : par manipulation, observation, expérimentation, conjecture et démonstration. Les enfants élaborent ainsi progressivement des « théories ». Et c’est cette élaboration progressive d’une théorisation qui montre toute l'importance de la géométrie dans la formation harmonieuse des enfants.

De cette manière, ils apprennent à sortir du monde réel et perceptible, à émettre des hypothèses, à analyser, à découvrir leurs erreurs, à défendre vis-à-vis des autres leurs points de vue, à remettre en question les acquis précédents.

Il ne s’agit donc plus de présenter une vue statique et sacralisée de la mathématique, science rigoureuse et incontestable distillant des vérités absolues et accessible seulement aux esprits rationnels.

La géométrie fait appel à l’ensemble des composantes de la personnalité humaine. Par la mise en commun de leur personnalité et de leur diversité, tous les enfants peuvent y trouver un point d’ancrage.

Cette approche de la géométrie procède par tâtonnements et retouches successives, fait naître des « pourquoi », des remises en causes continuelles, permet de distinguer le discours vrai du discours incorrect mais logiquement structuré. L’expérience d’ULMER montre d'ailleurs que le gain moyen de capacité de raisonnement est quatre fois supérieur pour ceux qui ont reçu un cours de géométrie comme technique de pensée, par rapport à ceux qui n’ont reçu aucune formation géométrique.

* Cf. bibliographie en annexe.

CHAPITRE 3 : ETAT DES LIEUX DE L'APPRENTISSAGE DE LA MATHEMATIQUE EN COMMUNAUTE FRANCAISE

3.1. Etat des lieux de l'apprentissage de la mathématique dans l'enseignement fondamental

Faire un état des lieux de l'apprentissage de la mathématique, tant dans l'enseignement fondamental que dans les autres niveaux d'enseignement amène inévitablement à faire des constats qui dépassent le cadre de la seule discipline mathématique.
Il sera par conséquent aussi question, non seulement de l'apprentissage en général, mais aussi des conditions qui le favorisent et des lacunes et/ou dysfonctionnements qui peuvent le desservir.

3.1.1. Des constats irréfutables

Par les nombreux échecs et/ou redoublements de classe qu'il génère, notre système d'enseignement, bien que considéré par beaucoup comme l'un des meilleurs au monde, reste perfectible à maints égards.

Même s'il est possible de nuancer les résultats obtenus aux épreuves internationales (cf. étude PISA 2003) par nos élèves et de constater qu'en mathématique et en résolution de problèmes, les résultats obtenus par les élèves de la Communauté française de Belgique sont très proches de la moyenne internationale, il n'en reste pas moins que cette moyenne est relativement faible par rapport aux très bons résultats obtenus par les élèves de certains pays.

Si l'on constate un certain manque d'homogénéité dans les résultats pour chaque branche de l'enseignement général, c'est surtout le manque d'équité (dispersion et différence trop grandes des résultats entre élèves) qui est très interpellant.
En effet, le système éducatif en Communauté française de Belgique est celui où les différences de résultats entre les élèves les plus faibles et les élèves les plus forts sont les plus importantes.

Ce constat force à se poser des questions sur les causes qui engendrent de tels écarts ainsi que sur les moyens à mettre en œuvre pour les réduire.

3.1.2. Des éléments liés à l'apprentissage en général

a) Le temps scolaire s'est considérablement réduit : 182 jours de classe aujourd'hui contre 272 jours il y a une vingtaine d'années …
En vingt ans, l'année scolaire a donc été amputée de quasi un trimestre.

b) L'atomisation du temps scolaire. Prenons l'exemple d'une classe de 5ème année primaire dans l'enseignement officiel à Bruxelles, soit 28 périodes de cours hebdomadaires, ventilées comme suit :

- 2 périodes de cours philosophiques ;
- 5 périodes de néerlandais données par un maître spécial ;
- au moins 2 périodes d'éducation physique (gymnastique, athlétisme, natation, …) ;
- 1 voire 2 périodes de cours donnés par les maîtres « ELCO » (Etude de la Langue et de la Culture d'Origine).

En résumé, et dans le meilleur des cas pour les élèves de cette école, il ne leur reste en tout et pour tout que 16 ou 17 périodes de 50 minutes par semaine pour apprendre le français, la mathématique, la géographie, l'histoire, les sciences, le dessin, la musique, etc.
Ces élèves n'ont matériellement pas le temps d'apprendre car les enseignants ne disposent plus eux-mêmes du temps nécessaire à l'enseignement des cours généraux.

c) Certains enseignants n'ont pas reçu une formation initiale assez pointue, tant du point de vue de la qualification disciplinaire que de la qualification pédagogique.
Force est de constater que des enseignants maîtrisent mal la matière à enseigner.

d) Le nombre particulièrement restreint de formations continuées consacrées à la mathématique.

e) Au nom d'une certaine innovation pédagogique, la nécessité de préparer ses leçons est devenue moins évidente.
Différentes recherches ont cependant démontré que des préparations pertinentes amènent souvent des activités de meilleure qualité.
A titre d'exemple, lorsque l'enseignant planifie son action sur un grand nombre de variables, celles-ci, une fois l'enseignant en présence de ses élèves, font l'objet d'une palette de décisions plus étendue.
Bien que l'on ne puisse avec certitude établir une relation de causalité entre la présence ou le contenu des documents de préparation et les performances des élèves, ces études convergent vers l'idée qu'une préparation des séquences d'apprentissage conduit à un enseignement plus efficace.

f) La désorganisation des apprentissages.
L'absence de manuels scolaires prive souvent l'apprentissage d'une discipline de la plus élémentaire logique. Cette absence conduit inévitablement à peu ou pas de progressions de l'élève, à un continuum souvent des plus chaotiques, c'est-à-dire à un véritable « zapping » de tranches de matières sans liens apparents entre les différents sujets abordés.
En lieu et place de manuels scolaires, on trouve par contre une masse considérable de documents photocopiés présentant surtout des exercices, puisés à gauche ou à droite.

Par Pierre Kroll - juin 2005.

g) La complexité des documents de référence.
Les enseignants disposent de très peu de documents de référence (programmes choisis par leur Pouvoir Organisateur, Socles de Compétences) qu'ils ont par ailleurs beaucoup de difficultés à s'approprier.
Par ailleurs, le jargon pédagogique utilisé dans certains de ces documents de référence déconcerte parfois.

A cet égard, ces ouvrages gagneraient en clarté et en efficacité, tant pour les enseignants que pour les élèves, s'ils contenaient des définitions claires des différents concepts utilisés.
Il est en effet essentiel que les enseignants puissent d'une part, donner le même sens à chaque terme utilisé et d'autre part, qu'ils aient conscience de ce que chaque concept peut induire en termes d'approches pédagogiques.

3.1.3. Des éléments liés à l'apprentissage de la mathématique

Dans le ***« Rapport sur la mise en place de l'école de la réussite »*** (Inspection de l'enseignement fondamental subventionné - Mars 2002), on peut lire :

- *« le domaine des nombres est nettement privilégié et ce au détriment de la géométrie, des grandeurs et du traitement des données ;*
- *toujours en ce qui concerne les nombres, on note peu de références aux propriétés des opérations ; on enseigne encore trop de « techniques » ;*
- *la géométrie et les grandeurs sont nettement déléguées aux titulaires de 5ème et 6ème ;*
- *le traitement des données est peu présent ;*
- *on constate un recours précoce à l'abstraction et au formalisme ; les manipulations sont peu fréquentes ;*
- *en ce qui concerne la géométrie, les formules et les calculs prévalent sur les démarches. »*

Ce même rapport poursuit :

« On constate l'absence de méthodologies adaptées, l'usage limité du principe des variations, de planifications et de progressions notamment dans l'utilisation de matériels élaborés … On constate des situations d'assouplissement du titulariat à l'intérieur même de la formation mathématique (maîtres de calcul, maîtres de géométrie...). »

3.2. Etat des lieux de l'apprentissage de la mathématique dans l'enseignement secondaire (général et qualifiant) et dans l'enseignement supérieur

3.2.1. Dans l'enseignement secondaire (général et qualifiant)

Hormis quelques cas particuliers d'élèves qui, venant de l'école primaire, maîtrisent bien les notions de base pour la poursuite du cours de mathématique dispensé dès la première année des études secondaires, la grande majorité considère le cours de mathématique comme étant à la fois très difficile et, surtout, très rébarbatif.
De leur propre aveu, les élèves de l'enseignement secondaire indiquent qu'à l'école primaire, ils ont subi le cours de mathématique bien plus qu'il n'y ont véritablement participé.

Craintifs et démotivés devant cette matière qui leur semble inabordable et inutile, il convient dès lors de très vite les repositionner dans des processus d'apprentissage qui puissent leur redonner confiance en eux tout en leur (re)donnant l'envie de « faire des maths ».

L'on constate alors qu'ils ont pourtant déjà pu aborder un grand nombre de notions élémentaires de la mathématique dans l'enseignement primaire mais que peu de ces notions sont réellement fixées (tables de multiplications, numération, opérations sur les nombres naturels et décimaux, estimation d'un résultat, propriétés des figures géométriques, utilisation du compas, de l'équerre Aristo, du rapporteur, …).

La remise en place de ces notions essentielles provoque un important retard dans le calendrier établi pour l'étude du programme spécifique. Ce programme prévoit que l'élève puisse franchir sa première année dans l'enseignement secondaire, nanti des pré-requis indispensables à la compréhension de la matière mathématique prévue par le programme de deuxième année.

Il en va de même pour les années scolaires suivantes. C'est l'effet « boule de neige ».

La 2ème année complémentaire semble ne pas trop poser de soucis aux enseignants dans la mesure où l'élève doit avoir atteint le niveau de compétences exigées au terme du premier degré pour avoir accès, sans restriction, à l'année supérieure.
La 1ère année complémentaire pose, par contre, de gros problèmes tant les matières à y enseigner ne sont pas clairement définies et sont, par voie de conséquence, sources d'interprétations multiples de la part des enseignants et des chefs d'établissement.

Deux attestations de réussite peuvent en effet être délivrées à l'élève au terme de la 1ère année complémentaire :
1. une attestation de fréquentation donnant accès à une 2ème année de formation commune ;
2. une attestation de réussite donnant accès à une 3ème année de l'enseignement qualifiant.

Dans l'enseignement qualifiant, entrent donc en 3ème année deux catégories d'élèves ayant suivi une 1ère année complémentaire dans des conditions très différentes :
1. l'élève x, sortant de l'école X, ayant suivi avec fruit une 1ère année complémentaire et ayant acquis les notions de la mathématique dispensée dans l'ensemble du 1er degré secondaire ;
2. l'élève y, sortant de l'école Y, ayant suivi avec fruit cette même année mais n'ayant acquis que les notions de mathématique relevant du programme de 1ère année de formation commune.

Ces deux élèves se retrouvent donc dans la même classe de 3ème année mais en disposant chacun d'un bagage mathématique très différent.

Il conviendrait d'élaborer des critères précis autorisant l'admission d'un élève de 1ère année complémentaire en 1ère année de second degré afin qu'une uniformité existe entre les différentes écoles de chaque réseau scolaire.

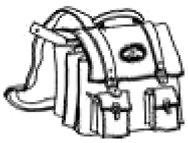
Dans le second degré de l'enseignement qualifiant, les élèves inscrits dans une section où le cours de mathématique se limite à 2 heures/semaine ont souvent fait ce choix par rejet de cette matière ou bien par contrainte d'un modèle d'attestation restrictif.

Les notions de mathématique abordées par ces élèves sont identiques à celles abordées par ceux ayant opté pour un cours de mathématique de 4 ou 5 heures/semaine ; seule la quantité de matière a été allégée par la suppression pure et simple de certains chapitres.

Il conviendrait de (re)donner à ces élèves du sens à l'enseignement de la mathématique en mettant l'accent sur des notions utiles à leur vie professionnelle future. En fonction de l'option choisie, il appartiendrait aux enseignants chargés des cours spécifiques d'établir un cadastre du bagage mathématique nécessaire à ces élèves.

Au 2ème degré de l'enseignement qualifiant, les élèves sont à nouveau confrontés aux matières étudiées tant à l'école primaire qu'au 1er degré de l'enseignement secondaire.
Ceux qui maîtrisent ces matières s'ennuient et ne voient pas l'intérêt de ces cours « déjà vus ».

En revanche, les élèves qui, au 1er degré, étaient en situation d'échec scolaire, se voient confrontés aux difficultés déjà rencontrées, ce qui n'améliore guère l'état de leurs connaissances en mathématique.



Comme l'enseignement fondamental, l'enseignement secondaire connaît des difficultés identiques liées aux moyens pédagogiques dont disposent les enseignants et les élèves, notamment :

- peu, voire pas de matériel didactique approprié à une pédagogie fonctionnelle et efficace (matériels de manipulation, possibilité d'utilisation de logiciels spécifiques, …) ;
- peu de manuels scolaires qui soient de véritables références – difficultés pour s'approprier ces manuels.

3.2.2. Les constats de l'étude PISA 2003

Le programme PISA[1] (Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves), est une initiative des pays membres de l'OCDE[2]. Ces pays ont décidé de mettre au point une évaluation commune afin d'étudier les acquis des jeunes de 15 ans dans trois disciplines : la lecture, la mathématique et les sciences.

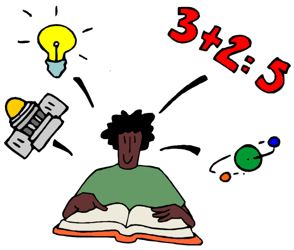
Afin d'assurer un suivi dans le recueil des données, des cycles d'évaluation de trois ans envisageant chaque fois les trois disciplines sont organisés. L'évaluation de 2000 était centrée principalement sur la lecture, celle de 2003 a approfondi l'évaluation de la culture mathématique et celle de 2006 accordera une place plus importante à la culture scientifique.

En 2003, en plus des trois domaines récurrents, la capacité à résoudre des problèmes a également été évaluée. Il s'agit de compétences transdisciplinaires qui font la part belle au raisonnement analytique.

Ainsi, la culture mathématique, domaine majeur de l'évaluation PISA 2003, implique la capacité des élèves à analyser, raisonner et communiquer de manière efficace lorsqu'ils posent, résolvent et interprètent des problèmes mathématiques dans une variété de situations.

[1] Pour plus d'informations sur les résultats des évaluations PISA (2000 & 2003), consultez le site : http://www.enseignement.be/@librairie/documents/ressources/A007/index.asp.
[2] Organisation de Coopération et de Développement Economique.

PISA confronte principalement les élèves à des problèmes ancrés dans le monde réel.
L'objectif est de voir dans quelle mesure ils peuvent se servir des compétences en mathématique qu'ils ont acquises au cours de leur scolarité pour résoudre des problèmes variés.



Remarque : contrairement à d'autres épreuves internationales et aux évaluations externes organisées en Communauté française de Belgique, le programme PISA ne se focalise pas sur des classes regroupant des élèves d'un niveau scolaire donné, mais sur des élèves d'un âge donné (plus précisément, entre 15 et 16 ans, c'est-à-dire les jeunes nés en 1987 pour PISA 2003), et ceci quelle que soit l'année d'étude ou le type d'enseignement fréquenté. Cet âge a été choisi parce qu'il correspond à la fin de la scolarité obligatoire à temps plein ou à temps partiel dans la plupart des pays.

Où se situent les résultats obtenus en mathématique et en résolution de problèmes par nos élèves en Communauté française de Belgique sur l'échelle internationale ?

En mathématique et en résolution de problèmes, le score de la Communauté française de Belgique (498) est très proche de la moyenne des pays de l'OCDE (500) ; en sciences (483) et en lecture (477) par contre, les résultats sont sensiblement en dessous de cette moyenne internationale. Ces résultats confirment ceux observés en 2000 lors de la première évaluation PISA.

Du point de vue de la mathématique, un premier examen de la répartition des élèves entre les différents niveaux, toutes années et filières confondues, fait apparaître **une dispersion importante des compétences** des jeunes de 15 ans.

En Communauté française, une minorité d'élèves (16 %) est capable de performances complexes ; 61 % des élèves sont à des niveaux intermédiaires et 23 % des élèves ne dépassent pas un niveau « élémentaire ». Cette répartition est proche de ce que l'on observe en moyenne dans les autres pays de l'OCDE : 15 % aux niveaux supérieurs, 64 % dans les niveaux intermédiaires et 21 % aux niveaux élémentaires.

Cependant, une analyse détaillée montre qu'une **hiérarchie** nette se dégage **entre les filières d'enseignement** et, au sein de chaque filière, **entre les années d'étude**. Les élèves de la **filière qualifiante** (enseignements technique et professionnel) se trouvent en grande difficulté face aux problèmes proposés ; le niveau de « culture mathématique » d'un nombre beaucoup trop important d'entre eux est réellement préoccupant ! Près de 50 % des élèves de 3ème année et plus de 20 % des élèves de 4ème année n'atteignent pas le niveau 2, considéré comme élémentaire (il y a 7 niveaux allant du plus fort [niveau 6] au plus faible [en dessous du niveau 1]).

Les constats sont plus rassurants dans la **filière de transition** (enseignement général) où les élèves sont nettement moins nombreux à se situer sous ce seuil de base en 3ème année (environ 10 %) et où l'on ne trouve pratiquement plus aucun élève dans cette situation en 4ème année (moins de 2 %). En 4ème année, une proportion non négligeable atteint même des performances d'un niveau élevé (34 % des élèves sont situés aux niveaux 5 et 6).

Enfin, nous terminerons par ce dernier constat de l'étude PISA, bien plus préoccupant. Il concerne les élèves « en retard » de scolarité qui présentent, et ceci dans les deux filières, des performances sensiblement plus élémentaires que les élèves « à l'heure ».

A titre comparatif, on peut noter que le score des élèves de 4ème année (toutes filières confondues) approche, dans chacune des disciplines, le score moyen des plus performants.

A l'opposé, les élèves « en retard » d'un an obtiennent, en moyenne, des scores se situant en dessous de la moyenne OCDE. Le score moyen des élèves en retard de deux ans est encore plus alarmant. Par exemple, en mathématique, le score de nos élèves « à l'heure » (546/500) est proche du trio de tête (Communauté flamande, Hong Kong et Finlande). Avec un score de 443/500, les élèves de 3ème année se trouvent proches de la Grèce (située à la queue du peloton des pays de l'OCDE) ; le score des élèves de 2ème année (351/500) est quant à lui inférieur au score moyen du Mexique (dernier pays de l'OCDE).

Rappelons que notre système scolaire se caractérise par une forte propension à pratiquer le redoublement : moins de 60 % des élèves sont encore « à l'heure » à l'âge de 15 ans !

L'analyse présentée ici débouche sur le même constat qu'en 2000 : **la présence massive d'élèves en retard constitue à n'en point douter un facteur de poids qui tire vers le bas le niveau de l'enseignement en Communauté française de Belgique !**

PISA 2000 avait déjà mis en évidence le caractère socialement inéquitable du système éducatif de la Communauté française de Belgique.

PISA 2003 confirme que le renforcement de l'équité est bien le défi à relever.

3.2.3. Dans l'enseignement supérieur

Il est remarquable de souligner la similitude existant entre les constats établis à chaque niveau d'enseignement (fondamental, secondaire inférieur et secondaire supérieur - général et qualifiant -, supérieur non universitaire et universitaire).
Les trois pierres d'achoppement qui constituent le plus grand obstacle à la progression efficace de l'apprentissage de la mathématique dans l'enseignement supérieur sont :

1. la méconnaissance de la langue française (vocabulaire mal maîtrisé, faiblesses en orthographe induisant une mauvaise compréhension des textes, voire de phrases même très simples) ;
2. les « trous » dans la formation dus à des programmes sans grande cohérence entre les différentes écoles secondaires, parfois même au sein d'un même réseau ;
3. les pertes de temps dues au rattrapage de notions mathématiques soit absentes, soit mal apprises (problème du retard progressivement accumulé : effet « boule de neige »).

Des professeurs qui enseignent la mathématique au niveau universitaire dans des départements très différents (Faculté des Sciences [physique, mathématique, biologie, …], Faculté des Sciences Humaines [sciences économiques, politiques, sociales, …]), établissent les mêmes constats :

a) au point de vue des connaissances, un assez grand nombre de notions mathématiques sont mal maîtrisées, quand elles ne sont pas carrément inconnues. Il en va ainsi, par exemple, des bases du calcul différentiel et intégral. Cela va même très souvent jusqu'à la maîtrise imparfaite des fractions ou de l'incapacité à réaliser une simple règle de trois … ;

b) au plan de la méthode, il semble que certains enseignants du secondaire aient surtout favorisé l'apprentissage de recettes toutes faites, sans trop s'interroger sur les soubassements (les ingrédients) et les interactions que ces derniers peuvent avoir entre eux, ce qui égare la compréhension et empêche des applications de résultats à de nouveaux contextes ;

c) l'art de la démonstration mathématique n'a pas toujours été transmis. Plus gravement encore, il semble que les étudiants ne soient pas souvent familiarisés (même passivement) avec ce type particulier de raisonnement en mathématique (l'art de la preuve), ni d'ailleurs – et c'est bien là le plus grave – avec le raisonnement logique ;

d) il y a également certaines déficiences dans l'art de la représentation géométrique, même très simpliste, comme par exemple représenter une droite dans un plan … Cela rend très difficile l'enseignement d'autres disciplines, telle l'économie politique qui recourt souvent à la notion généralisée de graphes ;

e) enfin, bon nombre d'étudiants semblent ignorer le concept de la modélisation, c'est-à-dire le lien existant entre les outils mathématiques et la représentation du réel. Il s'en dégage chez ces étudiants le sentiment que « les maths » sont inutiles, ou qu'elles n'existent dans les programmes que dans un but de sélection …

A l'Université Libre de Bruxelles notamment, ces constatations ont amené l'équipe pédagogique à devoir mettre en place des « mises à niveau » qui peuvent aller jusqu'à l'organisation de multiples « guidances » tout au long de l'année académique. Celles-ci sont nées d'un désir d'aide à la réussite, mais sont surtout devenues indispensables. Elles constituent parfois un passage obligé, une espèce de second cours en parallèle qui, pour certains départements, peut s'étaler sur quatre mois entiers de « révision », de (re)mise en place des notions essentielles de la mathématique.

D'une manière générale, les difficultés que l'on retrouve aux stades supérieurs de la formation scolaire des étudiants sont semblables à celles rencontrées dans les enseignements fondamental et secondaire.

3.3. Autres constatations

Outre les constatations citées plus haut, on relèvera principalement :

$$A_n = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^n}}$$

- insuffisance du nombre d'heures de cours de mathématique prévues pour l'apprentissage des théories et des méthodologies spécifiques à « l'Ecole Normale » dans la formation des futurs instituteurs maternels et primaires. Sur ce dernier point, le programme actuel prévoit :

✓ <u>pour les bacheliers instituteurs préscolaires</u> :
- en première année : en moyenne une heure de mathématique par semaine pour la présentation de la théorie et de la méthodologie ;
- en deuxième année : en moyenne deux heures de mathématique par semaine pour la présentation de la théorie et de la méthodologie ;
- en troisième année : en moyenne une demi-heure de mathématique par semaine pour la présentation de la théorie et de la méthodologie.

✓ <u>pour les bacheliers instituteurs primaires</u> :
- en première année : en moyenne trois heures de mathématique par semaine pour la présentation de la théorie et de la méthodologie ;
- en deuxième année: en moyenne trois heures de mathématique par semaine pour la présentation de la théorie et de la méthodologie ;
- en troisième année: en moyenne, une heure et demi de mathématique par semaine pour la présentation de la théorie et de la méthodologie.

<u>Remarque</u> **:** le problème du nombre d'heures de cours ne se pose pas pour les bacheliers régents en mathématiques.

- pour l'agrégation des licenciés en sciences-mathématiques :
  - insuffisance du nombre de cours concernant les méthodologies spécifiques à l'enseignement de la mathématique ;
  - manque de contact avec des enseignants de terrain expérimentés ;
  - manque d'exemples de "*bonnes pratiques pédagogiques*" pour chaque type d'enseignement (technique – professionnel - général).

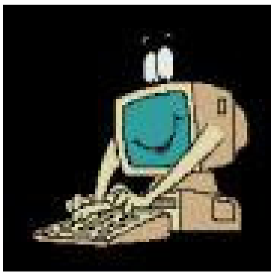
- pour les formations continuées :
  - manque de propositions combinant à la fois la présentation théorique et didactique, ainsi que la description des activités réellement réalisées en continu dans les classes et à travers tout l'enseignement (fondamental et/ou secondaire). Bien que très intéressantes, trop de formations sont du type culturel et pas assez « réalités classes ».

CHAPITRE 4 : PROGRAMMES (CURRICULUMS) ADAPTES AUX FILIERES DE FORMATION

4.1. Exemples de « pratiques pédagogiques » réalisées dans des classes à l'intention des enseignants

Pour atteindre les objectifs que le Gouvernement de la Communauté française s'est fixés pour l'amélioration de l'enseignement, le *Contrat pour l'Ecole* prévoit, entre autres priorités, de doter les élèves et les enseignants des outils du savoir.

La diffusion et l'utilisation au sein des classes d'outils pédagogiques s'appuiera notamment sur l'outil informatique et concernera également les outils agréés produits par les enseignants eux-mêmes, à l'intention des enseignants et des élèves (fiches pédagogiques, manuels scolaires, syllabus, plans de matières, descriptions d'activités, ...).



Cette diffusion constituera un des noyaux grâce auxquels se mettra en place l'échange des « bonnes pratiques » développées au quotidien dans les classes et les écoles.

Les modèles qui vont suivre essaient de répondre à ces souhaits. Ils illustrent, à titre exemplatif et de manière non exhaustive, quelques activités mathématiques réalisées réellement dans des classes.

4.2. A propos de la géométrie dans l'enseignement fondamental et dans le 1^er degré de l'enseignement secondaire

Les quelques notes de géométrie données ci-après essaient de répondre aux manquements constatés dans le ***« Rapport sur la mise en place de l'école de la réussite »*** (cf. point 3.1.3.).

Elles ne sont qu'un reflet très partiel d'activités réalisées sur le terrain à travers tout l'enseignement fondamental.

Précisons encore que :

1. les activités géométriques proposées sont en concordance avec les matières de l'enseignement secondaire et les exigences des Socles de Compétences ; elles n'ont d'autre ambition que de « plonger » les élèves dans une approche cohérente, continue et structurée de la géométrie.

2. le matériel utilisé et les méthodologies adaptées aux matières assurent une appropriation progressive d'images mentales nécessaires à la compréhension profonde des concepts géométriques, tout en leur donnant du sens.

4.2.1. Exemple d'ordonnancement « vertical » d'une matière : la famille des carrés

<u>Evolution de l'étude de la famille des carrés</u>
<u>de la classe maternelle à la deuxième année de l'enseignement secondaire</u>

1. L'étude de la famille des carrés de la classe maternelle à la deuxième année de l'enseignement secondaire se fait en deux phases distinctes :
   - en classe maternelle et au premier degré de l'école primaire (1ère et 2ème année), l'analyse des carrés se fait figure par figure ;
   - à partir de la troisième année primaire jusqu'à la sixième année primaire, les carrés sont groupés en famille (la famille des carrés). On recherche les propriétés communes à tous les membres de cette famille.

2. En première année de l'enseignement secondaire, étant donné les origines scolaires différentes des élèves, cette année est considérée comme une année de « synthèses-rappels » de toute la matière vue dans l'enseignement primaire. Il s'agit donc d'une mise à niveau générale pour pouvoir affronter ensuite l'abstraction théorique de la deuxième année.
3. En deuxième année du secondaire, un pas de plus se fait dans l'abstraction, en recherchant les conditions nécessaires et suffisantes de la famille des carrés, en s'appuyant notamment sur les éléments de symétrie des figures.

4. Pour les autres familles de quadrilatères convexes (la famille des losanges, la famille des rectangles, la famille des parallélogrammes, …), les mêmes démarches sont suivies.

A) <u>En classe maternelle (des carrés aux cubes et des cubes aux carrés)</u>

Notion de carrés, au départ du matériel Polydron Frameworks©, constitué d'éléments plastifiés à assembler (plaquettes pleines et plaquettes évidées) :

- ✓ Comparaison des figures carrées, par la superposition deux à deux.
- ✓ Constatations : elles ont toutes la même forme et la même grandeur ; elles sont donc isométriques.
- ✓ Par pivotement de deux carrés de même grandeur, découverte des 4 côtés de même longueur.
- ✓ Par contournement intérieur des faces, découverte de quatre côtés droits et de quatre pointes appelées sommets : 4 sommets.
- ✓ Recherche de carrés dans l'entourage de la classe (ne pas confondre avec des rectangles).

- ✓ Construction, à l'aide de chalumeaux, de carrés de grandeurs différentes (en tenant compte de la longueur des côtés).
- ✓ Surprise : les carrés en chalumeaux se déforment en losanges.
- ✓ Comment revenir du losange au carré ? Le placement d'un angle droit métallique dans un angle des losanges redresse les losanges en carrés.
- ✓ Peut-on construire des cubes avec des carrés ? Essais en utilisant les plaquettes.
- ✓ Combien de plaquettes carrées faut-il pour construire un cube ? Comptage : six carrés.
- ✓ Les plaquettes pleines correspondent-elles à des carrés ? (La superposition des plaquettes évidées aux plaquettes pleines montre que les deux types de plaquettes sont isométriques.)

- ✓ Construction de cubes avec un mélange de faces carrées pleines ou évidées (attention, les cubes doivent être fermés ; ils doivent être constitués nécessairement de leurs six faces !).
- ✓ Ouverture des cubes réalisés en plaquettes évidées et obtention de quelques développements différents.
- ✓ Par contournement intérieur des faces des cubes développés, obtention des développements sur papier et comparaisons de la place des six faces carrées.
- ✓ Construction de cubes en chalumeaux : rappel du nombre de faces, construction des faces carrées en choisissant toute la longueur des chalumeaux; assemblage des faces (4 + 2 = 6).

B) <u>Dans l'enseignement primaire</u>

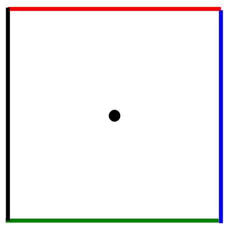
<u>En première année</u>

- ✓ Découverte d'une grande quantité de carrés qui, par superposition à l'aide d'un transparent, montre qu'ils ont la même forme mais pas nécessairement la même grandeur : tous les carrés sont donc semblables.

- ✓ Découverte des quatre côtés de même longueur, par mesurage des côtés.
- ✓ Découverte des quatre angles droits, par emboîtement d'angles droits.
- ✓ Découverte du parallélisme des côtés opposés, par le placement de carrés entre deux fils à plomb.
- ✓ Recherche de carrés en croisant des bandes aux bords parallèles ; « par erreurs », découverte de quadrilatères autres que des carrés.
- ✓ Tracer des carrés de grandeurs différentes dans un quadrillage.
- ✓ Recherche de carrés sur des polyèdres.

<u>En deuxième année</u>

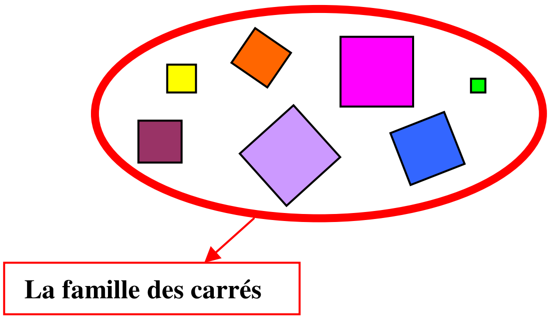
- ✓ Idem première année.
- ✓ <u>En plus</u> :
  - Vérification de la longueur des côtés par la superposition d'un transparent isométrique et par des mouvements de rotations ou de retournements permettant de « passer » d'un côté coloré au suivant, au précédent ou à celui se trouvant en face.
  - Vérification du parallélisme des côtés opposés, par le choix et la superposition des bandes transparentes à bords parallèles correspondant à la largeur des côtés.



- ✓ Construction de carrés avec des chalumeaux.
- ✓ Constatation : les carrés en chalumeaux se déforment en losanges.
- ✓ Revenir aux carrés par le placement d'un angle droit métallique dans un angle des losanges.
- ✓ Construction de cubes avec des plaquettes pleines et évidées.
- ✓ Dénombrement des faces des cubes complets : 4 + 2 = 6.
- ✓ Construction de cubes avec des chalumeaux.

En troisième année

- ✓ Sélection des carrés parmi des quadrilatères.
- ✓ Recherche des qualités communes à tous les membres de la famille des carrés :
  - tous les côtés de même longueur,
  - tous les angles de même amplitude,
  - deux paires de côtés parallèles de même écartement.
- ✓ Découverte de la superposabilité de tous les carrés à eux-mêmes par déplacement(s) (du transparent isométrique).



- ✓ Découverte de la superposabilité de tous les carrés à eux-mêmes par retournement(s) (du transparent isométrique).
- ✓ Calcul du périmètre.
- ✓ Recherche de la mesure d'un côté, connaissant le périmètre.
- ✓ Dessin de carrés à l'aide de la latte et de l'équerre Aristo.
- ✓ Recherche de carrés sur des polyèdres.
- ✓ Rappel du positionnement des faces sur un cube.
- ✓ Dénombrement des arêtes sur un cube (plusieurs manières de « voir » ces arêtes).

En quatrième année

- ✓ Idem troisième année.
- ✓ En plus :

Etablissement de la synthèse des qualités communes :

4 côtés isométriques ;
2 paires de côtés parallèles de même écartement ;
4 angles droits.

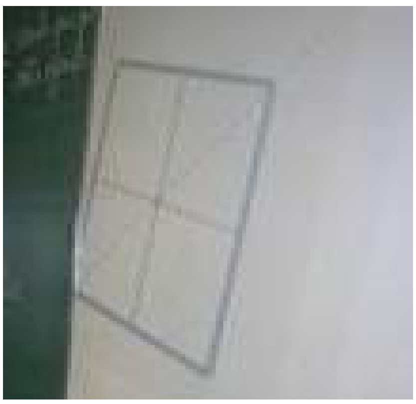
Tous les carrés sont superposables à eux-mêmes :

- par déplacements (4 rotations : ¼, ½, ¾, $^4/_4$) ;
- par retournements (4 symétries orthogonales: d_1, d_2, m_1, m_2).

Calcul raisonné du nombre de faces d'un cube et du nombre d'arêtes (quand le cube est « démonté » puis quand le cube est « fermé »).

En cinquième année

- ✓ Idem quatrième année.
- ✓ En plus :
  - Recherche des axes de symétrie par les transformations (symétries orthogonales).
  - Synthèse : les 2 diagonales et les 2 médianes sont les droites de points fixes des 4 symétries orthogonales qui superposent tout carré à lui-même ; elles sont donc les 4 axes de symétrie des carrés.



<u>En sixième année</u>

- ✓ Idem cinquième année.
- ✓ <u>En plus</u> :
  - Recherche des propriétés des médianes et des diagonales, à l'aide des transformations adéquates (rotations de 90° ou 180° ou symétries orthogonales) :
    Sont-elles de même longueur ?
    Se coupent-elles en leur milieu ?
    Sont-elles perpendiculaires ?
    Sont-elles des axes de symétrie ?
  - Vérifications et argumentations.
  - Reconnaître le quadrilatère correspondant, en connaissant les caractéristiques de ses diagonales.
  - Tracer des quadrilatères, connaissant la longueur et de la position de leurs diagonales.
  - Calcul du nombre de faces, du nombre d'arêtes – du nombre de sommets d'un cube (découvrir les relations existant entre eux).

C) <u>Dans l'enseignement secondaire</u>

<u>En première année</u>

Etant donné les origines scolaires différentes des élèves, cette année est considérée comme une année de « synthèses-rappels » de toute la matière vue dans le primaire. Il s'agit donc d'une mise à niveau générale pour pouvoir affronter ensuite l'abstraction théorique de la deuxième année.

Classement de la famille des carrés et leurs propriétés y compris les automorphismes ou les éléments de symétrie.

- ✓ Définition.
- ✓ Automorphismes ou les éléments de symétrie.
  - centre de rotation d'ordre 4 ;
  - axes de symétrie (médianes et diagonales).
- ✓ Propriétés usuelles.
  - parallélisme des côtés ;
  - propriétés des médianes et des diagonales.

<u>En deuxième année</u>

Un pas de plus se fait dans l'abstraction, en recherchant les conditions nécessaires et suffisantes de la famille des carrés, en s'appuyant notamment sur les éléments de symétrie des figures.

- ✓ Définition – rappel.
- ✓ Automorphismes ou éléments de symétrie – rappel.
  - centre de rotation d'ordre 4 ;
  - axes de symétrie (médianes et diagonales).
- ✓ Recherche des conditions nécessaires et suffisantes correspondant à la famille des carrés.
  - Quadrilatères convexes et centre de rotation d'ordre 4.
  - Quadrilatères convexes et diagonales et médianes axes de symétrie.
  - Quadrilatères convexes dont les diagonales sont : perpendiculaires, se coupent en leur milieu, sont de même longueur.
  - Etc…

Pour les autres familles de quadrilatères convexes (la famille des losanges, la famille des rectangles, la famille des parallélogrammes…), les mêmes démarches sont suivies.

4.2.2. Exemple de description d'une leçon en classe maternelle et en quatrième année primaire

Chacune de ces leçons ci-après décrit, de manière succincte, les concepts géométriques et les compétences développés, les déroulements, le matériel nécessaire, la méthodologie adaptée et les réactions des enfants.

<u>**Constructions de polyèdres en classe maternelle**</u>

Concepts et compétences développés

Première découverte du matériel Polydron Frameworks©.
Assemblages libres individuels de plaquettes polygonales pleines et évidées.
Constructions individuelles de solides (polyèdres), à l'aide des plaquettes évidées et des plaquettes pleines ; installation des premières notions telles que :

- un polyèdre doit être « complet », complètement « fermé ».
- toutes les faces polygonales doivent s'adapter « exactement » les unes aux autres (sans laisser de tenons libres).

Matériel nécessaire

Des gros sacs de plaquettes pleines comprenant : des triangles équilatéraux, des carrés, des rectangles, des pentagones réguliers, des hexagones réguliers.
Des gros sacs de plaquettes évidées comprenant : des triangles équilatéraux, des carrés, des rectangles, des pentagones réguliers, des hexagones réguliers.
Un local disposant d'une très grande table d'observation.

Déroulement de l'activité

Préalablement, nous avions mélangé, dans une grande boîte, toutes les plaquettes polygonales (pleines et évidées). Nous avions recouvert le tout d'un grand papier, de manière à ce que les enfants ne voient rien avant la découverte du matériel.

<u>Découverte des plaquettes polygonales et constructions individuelles.</u>

Nous avons rassemblé les enfants (une quinzaine) autour de la grande table.
Après avoir montré le « cadeau » qui leur était destiné, les enfants ont découvert le matériel que nous avons étalé dans le désordre, sur la grande table.
<u>a) Constructions libres.</u>

Tout de suite, les enfants se sont mis à assembler les « pièces » que nous avons appelées : des polygones.
Certains élèves construisaient à plat (des pavages) et d'autres, dans l'espace.
Nous avons laissé faire pendant quelques minutes, afin que chacun s'essaie à l'assemblage des pièces, comme un puzzle.

Nous avons fait remarquer que les pièces devaient s'assembler complètement les unes aux autres sans laisser de tenon libre.

b) Constructions « dirigées ».

Nous avons attiré l'attention de la classe sur la construction d'un élève. Cette construction-là prenait une forme arrondie dans l'espace. L'enfant utilisait des polygones « tous les mêmes ». Il a dit : « Je veux faire une boule ». Nous en avons profité pour faire remarquer que ce matériel ne permettait pas de faire des boules parce que rien n'était rond. Nous avons ajouté : « Tu vas donc obtenir un polyèdre. »

Cet élève-là a finalement obtenu, sans aide, un polyèdre qui s'appelle un dodécaèdre. Nous l'avons félicité.

Comme il le montrait à toute la classe, nous avons dit que ce beau polyèdre dont toutes les faces étaient les mêmes s'appelait un dodécaèdre. Nous avons fait répéter ce mot par les enfants.

Abandonnant leurs pavages, d'autres élèves se sont mis à construire aussi des polyèdres dans l'espace, en choisissant d'abord des plaquettes « toutes les mêmes ».
Nous avons vu apparaître plusieurs polyèdres tels que : dodécaèdres, cubes, tétraèdres, deltaèdres.
Pour chacun de ces polyèdres, nous disions les noms correspondants, en les faisant répéter.
Les enfants connaissaient déjà les appellations de : cube et pyramide.
Lorsque nous avons énoncé : « pyramide ou tétraèdre », un enfant a dit qu'il connaissait d'autres pyramides comme en Egypte. Et, pour nous le prouver, il s'est mis à construire une pyramide à base carrée ; nous l'avons félicité.
Après l'avoir montrée à la classe, nous avons dit aux enfants qu'ils pouvaient construire en utilisant plusieurs « sortes » de polygones dans un même polyèdre.
Des élèves ont alors construit avec des « mélanges » de faces. Ils ont obtenu des polyèdres originaux.
Au cours des constructions, nous avons insisté pour que les solides soient fermés, c'est-à-dire pour qu'aucune attache de plaquettes « ne dépasse des constructions ».
Instinctivement, les enfants ont alors compris ce que signifiait « un polyèdre complet, fermé ».

Remarques :

- Finalement, sans que nous soyons intervenus, les enfants ont construit des polyèdres en mélangeant sans distinction des faces pleines et des faces évidées.
- Nous les avons vus superposer des faces évidées aux faces pleines pour comparer les « formes » des faces.
- Bien que des polyèdres aient été construits uniquement avec des faces évidées et d'autres avec des faces pleines ou même avec des mélanges de faces pleines et évidées (c'était notamment le cas des cubes), les enfants n'ont pas fait de différence entre plusieurs types de représentations d'un même polyèdre !
- Sur la table où ils déposaient leurs polyèdres terminés, ils groupaient naturellement tous les polyèdres isométriques entre eux : les dodécaèdres, les cubes, les tétraèdres, ...

Nous avons été surpris lorsqu'un élève nous a proposé cette fantaisie : « un polyèdre avec une porte » !!!
Il a expliqué qu'il avait construit une maison avec une porte pour le chat.
Nous sommes intervenus en attirant l'attention de la classe sur cette construction et en précisant que les polyèdres devaient être complètement fermés. Ainsi, une face rectangulaire ne peut pas être remplacée par une face carrée et former dès lors un « trou ».
Nous avons refusé (aimablement) cette fantaisie en expliquant que le polyèdre que nous souhaitions n'était pas tout à fait comme une petite maison. Il devait donc être fermé partout (sans « tenon » visible).

Observation des constructions

Pour la construction de polyèdres, quelques enfants ont assemblé plusieurs faces polygonales dans un même plan. Nous savons que, dans l'enseignement fondamental, les règles de construction des polyèdres n'admettent pas l'assemblage de plusieurs polygones dans un même plan mais il nous était cependant impossible de faire comprendre ces contraintes à des élèves de classe maternelle.
Nous avons cependant fait comparer ces polyèdres avec les autres.
Nous avons félicité tous les enfants pour leurs constructions de polyèdres bien « fermés » et, nous avons dit simplement que ceux-là (ceux ayant au moins deux faces dans un même plan) étaient des polyèdres particuliers, trop difficiles pour travailler dessus tout de suite.

Nous les avons donc écartés ; ce que les enfants ont bien accepté.

Cette activité était prévue pour une durée de 25 minutes ; elle a duré 50 minutes car les enfants étaient très enthousiastes et ne souhaitaient pas l'interrompre.

Voici toutes leurs constructions de polyèdres.

La famille des carrés en quatrième année primaire

Concepts et compétences développés
Par le classement des quadrilatères, redécouverte de la famille des carrés.
A l'aide du matériel didactique adéquat (sur transparents), rappel et mise au point des propriétés communes à tous les membres de la famille des carrés.
Vérifications de la longueur des côtés, du parallélisme des côtés, des angles opposés, des transformations possibles (quels déplacements et quels retournements superposent les carrés à eux-mêmes).
Dégagement des propriétés communes à tous les membres de la famille des carrés.
Mise au point de la synthèse écrite collective.

Matériel nécessaire à cette activité
Une série de dessins de quadrilatères (au moins un par élève - *voir les modèles donnés ci-après* -).
Un cerceau ou un cercle en fil de fer ou fil électrique.
Un rétro-projecteur et un tableau blanc.
Les modèles sur transparents donnés ci-après.
L'équerre Aristo des enfants.
Les feuilles individuelles à compléter en guise de synthèse.

Déroulement de cette activité

1. Classement des quadrilatères

Nous avons groupé les enfants autour d'une grande table sur laquelle nous avions déposé un grand cercle fait de fil électrique.
Nous avons dit aux enfants que chacun d'entre eux allait recevoir un quadrilatère et qu'il faudrait ensuite qu'ils déposent tous les carrés dans le cercle constituant la famille des carrés.
Tout en distribuant une figure géométrique à chaque élève, nous avons demandé de rappeler ce que l'on entend par quadrilatère.
Nous voulions obtenir finalement cette définition-ci : « Un quadrilatère est un polygone à 4 côtés. »
C'était aussi l'occasion de faire énoncer la « définition » d'un polygone.

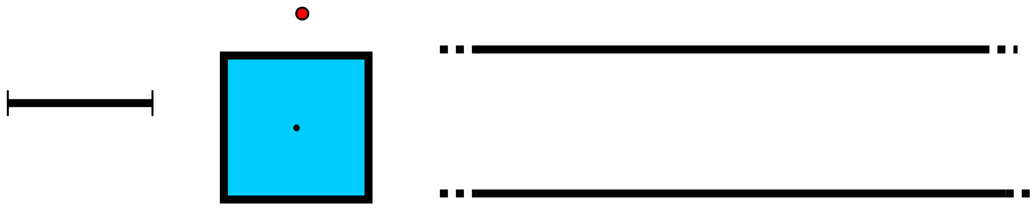
Après avoir pris connaissance de leur quadrilatère, et au signal donné, tous les enfants ont déposé leur dessin là où ils estimaient lui trouver sa place.
Ensemble, nous avons ensuite examiné si le cercle contenait bien tous les carrés distribués et où se situaient les autres quadrilatères (bien entendu, à l'extérieur du cercle).

Nous avons félicité les enfants puisqu'il n'y avait pas d'erreur. Chacun est ensuite retourné à sa place.

Lorsque nous avons demandé combien de carrés il existait, les enfants ne sont pas laissé prendre au piège ! Ils ont bien expliqué qu'il en existait une infinité puisqu'il pouvait y en avoir autant que l'on pouvait en imaginer et même plus et qu'ils pouvaient être soit de la même taille ou soit de grandeurs différentes.
Immédiatement, des enfants ont encore précisé que tous ceux qui avaient la même taille étaient alors des carrés isométriques tandis que les autres, soit plus grands ou plus petits, étaient des carrés semblables. Nous avons apprécié le réinvestissement adéquat et correct de notions acquises dans d'autres chapitres de la géométrie.

2. <u>Travaux avec transparents, au rétro-projecteur</u>

Rappel des propriétés des carrés.
Sur le plateau du rétro-projecteur, nous avons déposé un carré, deux droites parallèles et un segment de droite.



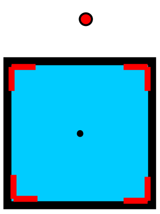
Nous adressant à la classe, nous avons demandé de décrire le matériel apparaissant sur l'écran. Cela nous a permis de faire préciser les différences entre droite et segment de droite et de faire reconstruire les petites définitions orales et collectives d'une droite et d'un segment de droite jusqu'à obtenir :
« Une droite est illimitée dans les deux sens. »
« Un segment de droite est un « morceau de droite » ; il est donc limité dans les deux sens. »

a) A propos des côtés des carrés

Comme nous demandions de se servir du matériel visible à l'écran pour rappeler les propriétés des côtés des carrés, un élève s'est proposé.
Saisissant le segment de droite, il l'a superposé à un des côtés et a constaté qu'il avait la même mesure. Il a dit : « Normalement, tous les côtés doivent avoir la même mesure. » Ce disant, il a alors superposé le segment aux autres côtés, prouvant que tous les côtés étaient isométriques.

<u>Il restait à utiliser les droites parallèles.</u>
L'élève suivant a prouvé que les côtés opposés étaient parallèles et que la même bande de parallèles pouvait servir pour les deux paires de côtés opposés.
Les enfants ont immédiatement ajouté que si ce n'était pas un carré mais un rectangle quelconque, il faudrait deux bandes de parallèles d'écartements différents. Ce que nous avons approuvé.

b) A propos des angles



Nous avons fait montrer les angles opposés.
Comme nous attirions leur attention sur la valeur des angles, les enfants ont proposé deux solutions de vérification : soit les mesurer avec le rapporteur, soit placer l'angle droit de l'équerre Aristo dans chacun des angles.
L'élève désigné a montré, par superposition de l'angle droit de son équerre Aristo, que les quatre angles étaient bien des angles droits.
D'autres enfants ont encore ajouté : « Puisque c'est un carré, dès qu'il y a un angle droit, on est sûr qu'il y en a quatre. » Nous sommes intervenus en précisant que cela était bien sûr très visible avec les tiges de mécano, mais que dans ce cas-ci, nous demandions de vérifier chacun des angles.

c) A propos des transformations.

Nous avons dit aux enfants qu'il fallait préciser par quelles transformations les carrés étaient superposables à eux-mêmes.
Avant de vérifier, les enfants ont dit tout de suite qu'ils étaient superposables à eux-mêmes par des déplacements qui s'appelaient des rotations et aussi par des retournements qui s'appelaient des symétries orthogonales.

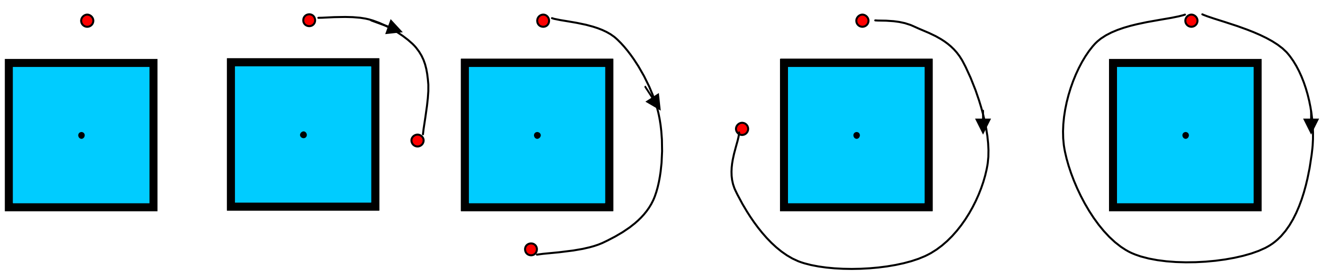
Nous les avons félicités pour ces nouvelles précisions mais en leur disant que, comme ils étaient capables de déterminer les types de rotations et les types de symétries orthogonales, ils allaient les rappeler avec le matériel adéquat.

Nous avions bien du mal à contenir leur enthousiasme, parce que sans que nous leur demandions, ils énonçaient les rotations attendues dans le sens horlogique et dans le sens anti-horlogique, de même que les symétries orthogonales selon les axes de symétrie qu'ils avaient découverts au cours des activités précédentes.
Après leur avoir permis de manifester leurs connaissances, nous avons repris la classe en main.

<u>Combien de rotations superposent les carrés à eux-mêmes</u> ?

Sur le plateau du rétro-projecteur, nous avons déposé deux carrés isométriques ayant un repère rouge à l'extérieur.

L'élève désigné est allé les superposer puis a montré, avec une facilité déconcertante, que les carrés pouvaient se superposer à eux-mêmes par 4 rotations ; soient ¼ de tour, ½ tour, ¾ de tour et $^4/_4$ de tour ou un tour complet, dans le sens horlogique

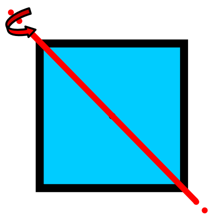


ou dans le sens anti-horlogique.

<u>Quelles symétries orthogonales superposent les carrés à eux-mêmes ?</u>

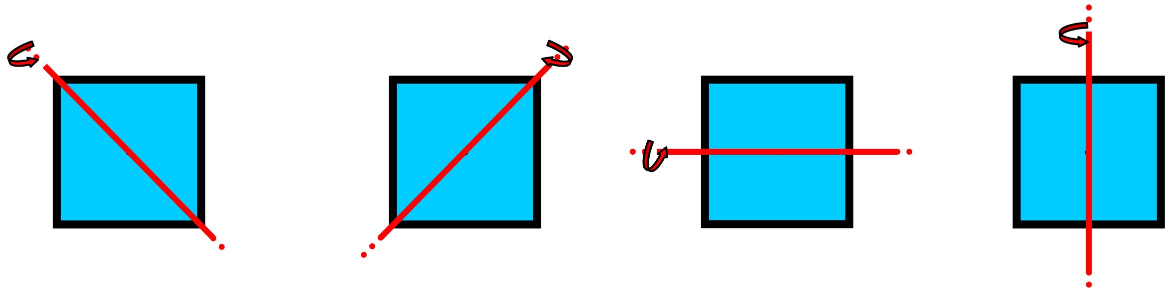
Déposant un carré sur le plateau, nous avons demandé d'aller montrer à l'écran, par où devait passer une droite de points fixes de symétrie orthogonale qui permette au carré de se superposer à lui-même.

L'enfant désigné est allé placer deux doigts à deux sommets opposés du carré.
Nous lui avons demandé de « tracer » à l'aide d'un doigt la droite qui permettait cette symétrie orthogonale. Ce faisant, l'enfant a dit : « C'est une diagonale et c'est un axe de symétrie. » Nous l'avons félicité.



Lui donnant deux modèles de carrés isométriques sur transparents contenant une diagonale, nous lui avons demandé de prouver que le carré se retournait bien sur lui-même quand la droite de points fixes était une diagonale.

Nous adressant à la classe en demandant s'il existait d'autres symétries orthogonales qui superposent les carrés à eux- mêmes, nous avons obtenu sans difficulté ce que nous attendions.



C'est ainsi que d'autres enfants sont allés montrer les deux diagonales et les deux médianes et ont prouvé, de la même manière que précédemment, que les deux diagonales et les deux médianes des carrés sont les droites de points fixes des symétries orthogonales qui superposent les carrés à eux-mêmes.

3. <u>Rappel oral des propriétés de tous les carrés</u>

Par le jeu des questions et des réponses à propos des « manipulations » qui venaient d'être effectuées au cours de cette activité, nous avons obtenu :
Tous les carrés ont :

- 4 angles droits.
- 4 côtés isométriques.
- 2 paires de côtés parallèles de même écartement.
- Ils sont superposables à eux-mêmes par 4 déplacements ou rotations ; ¼, ½, ¾, $^4/_4$ de tour.
- Ils sont superposables à eux-mêmes par 4 retournements ou 4 symétries orthogonales : les deux diagonales et les deux médianes sont les droites de points fixes.

4. <u>Mise au point écrite sur feuille</u>

Les enfants ont reçu une feuille qu'ils ont complétée collectivement par le jeu des questions et des réponses.
Nous avons inscrit leurs réponses au tableau, ils devaient ensuite les recopier sans faute, aux endroits prévus.

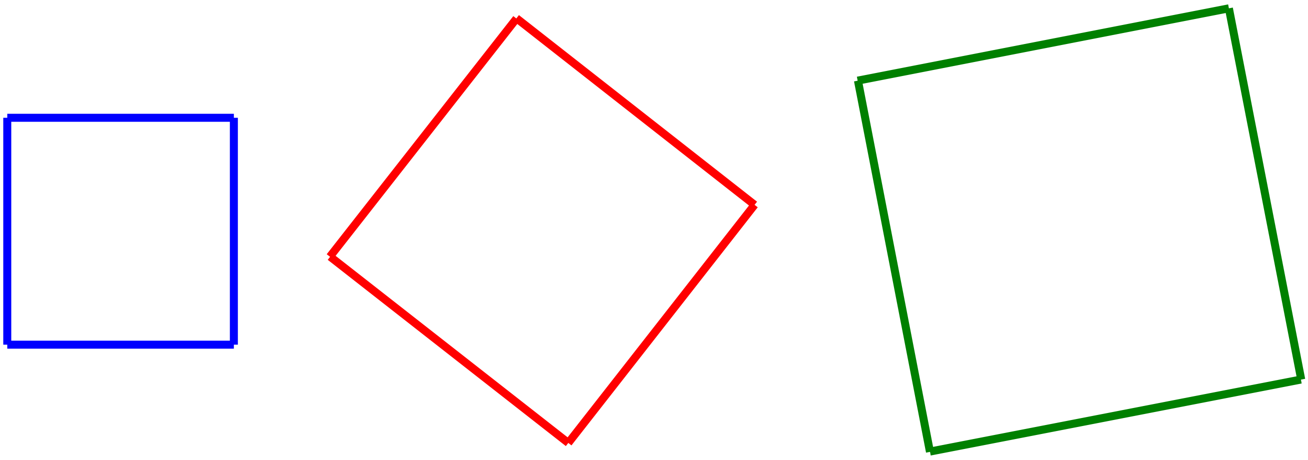
Nous avons convenu d'utiliser des signes conventionnels pour écrire plus simplement les mots médianes et diagonales :

- « première médiane : m_1 » , « deuxième médiane : m_2 » ;
- « première diagonale : d_1 » , « deuxième diagonale : d_2 « ».

(voir la synthèse sur la page suivante)

La famille des Carrés (en quatrième année) - Corrigé

Rappel des qualités communes à ces quadrilatères.



RETENONS les qualités communes à tous les carrés :

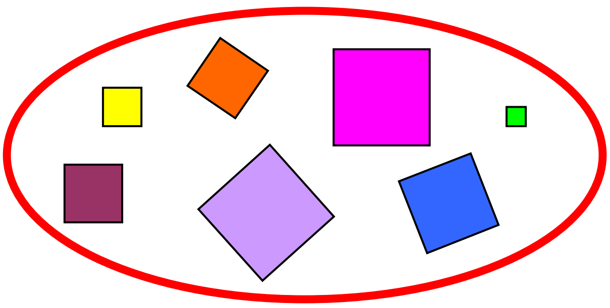
tous les carrés possèdent :

- 4 côtés isométriques
- 2 paires de côtés parallèles de même écartement
- 4 angles droits

Les carrés sont-ils **superposables à eux-mêmes** ? oui ? non ? comment ?

Oui, par déplacements (4 rotations : ¼, ½, ¾, $^4/_4$)

Oui, par retournements (4 symétries orthogonales : d_1, d_2, m_1, m_2)



La famille des carrés

Combien de carrés existe-t-il ?

Il existe une infinité de carrés

Comment sont-ils ?

Ils sont tous semblables

4.3. A propos des nombres et des fondements de l'algèbre dans l'enseignement fondamental et dans celui du 1er degré de l'enseignement secondaire

De tout temps, le calcul a été un élément majeur des objectifs de base fixés à l'école fondamentale : lire, écrire, **calculer**. Jamais personne ne lui a contesté ce statut capital.

4.3.1. L'importance du calcul dans l'apprentissage de la mathématique

Cette importance a été mise en exergue dans le paragraphe « un écueil à éviter » du programme provisoire de 1971 qui, en introduisant la mathématique ensembliste et relationnelle, craignait d'être mal interprété quant à l'importance à conférer à l'apprentissage du calcul :

« Le nouveau programme veille à introduire un équilibre entre la pensée mathématique et l'activité calculatrice ; ce serait mal l'interpréter que de centrer toute l'activité éducative sur un de ces deux objectifs aux dépens de l'autre.
Ainsi, négliger l'aspect utilitaire du calcul, les objectifs d'ordre technique, afin de centrer exclusivement l'apprentissage sur le développement de la pensée mathématique ; en arriver dès lors à pratiquer trop vite une logique détachée trop tôt de tout support concret : une sorte de jonglerie mentale faite de cordes et de flèches, un jeu gratuit, séduisant parce qu'il est neuf, mais d'autant plus gratuit qu'une pensée mathématique sans outils sûrs à son service est une pensée inopérante …
En un mot, pas de mathématiciens qui ne sachent pas calculer !
Ou encore, par un « placage » aussi artificiel que vain, juxtaposer des notions ensemblistes à un contenu arithmétique resté traditionnel. Cette pratique, mal justifiée par un souci de modernisme à tout prix, ne fait que provoquer une surcharge de matière mal digérée sans contribuer au développement de la pensée logique. En un mot, pas de calculateurs travestis en mathématiciens ! »

4.3.2. La nécessité de maîtriser la matière, une des conditions pour améliorer la manière

Pour donner au calcul le statut qu'il mérite dans l'initiation mathématique à l'école fondamentale, il convient que les enseignants maîtrisent suffisamment cette science ; une science vis-à-vis de laquelle trop de blocages psychologiques existent dans le chef des enseignants polyvalents, des omnipraticiens de la pédagogie que sont les institutrices et les instituteurs.

Les progrès à réaliser dans les méthodes d'apprentissage de la mathématique, pour ne parler que d'elle, sont étroitement subordonnés aux progrès réalisés dans la maîtrise des notions à faire conquérir par les élèves.

En effet, si la connaissance relativement superficielle suffit souvent pour l'enseigner de façon directive, il faut une solide maîtrise de cette matière pour conduire son apprentissage en provoquant l'initiative des élèves.

Bref, il n'est guère de progrès sensible dans la MANIERE sans une maîtrise suffisante de la MATIERE.

Maîtriser une matière, c'est en premier lieu prendre conscience de certaines inexactitudes tenaces que la tradition scolaire, voire « profane », véhicule souvent de façon d'autant plus insidieuse que la matière en cause semble aller de soi, semble couler de source.

C'est assurément le cas pour les nombres et les opérations numériques, deux notions tellement familières à l'école primaire ou dans la vie quotidienne que bon nombre d'enseignants – en toute bonne foi – croient les connaître dans les moindres détails, donc les dominer parfaitement.

Et cependant, que de confusions dommageables, de restrictions regrettables et de catégorisations abusives ne relève-t-on pas dans certains cahiers d'écoliers, quant ce n'est pas carrément dans des manuels d'arithmétique à l'intention des enseignants eux-mêmes.

Pour ce qui est des confusions dommageables les plus couramment relevées, citons en vrac le fait de confondre :

- chiffre et nombre (mais il est vrai que, dans le langage courant, des expressions du genre : *« pour vous en convaincre, permettez-moi de vous donner quelques* ***chiffres*** *: sur quelque* ***500 000*** *personnes au chômage, seules* ***150 000*** *environ sont en réelle recherche d'emploi !) »* favorisent cette confusion.
En mathématique, 500 000 & 150 000 sont bien sûr des nombres, pas des chiffres ;
- nombres négatifs et repères du thermomètre : s'il y a bien un degré au-dessous de zéro, la température ne saurait en aucun cas être de *– 1 degré* (moins un degré de quoi ?) ;
- reste et différence ;
- division de partage et division de contenance ;
- addition et opérateur additif.

Pour les restrictions regrettables, citons le fait de restreindre :
- l'ensemble des nombres rationnels aux nombres décimaux ;
- la numération de position à la numération décimale ;
- le zéro à son rôle de chiffre ;
- les opérations aux quatre opérations fondamentales (additionner, soustraire, multiplier, diviser) ;
- les propriétés des opérations à quelques procédés de calcul.

Pour les catégorisations abusives, sinon inutiles, citons le fait de distinguer par le menu : nombres fractionnaires, expressions fractionnaires, nombres décimaux, fractions ordinaires, fractions décimales, … au risque d'en faire des nombres différents les uns des autres.

Essayer de rectifier ces inexactitudes conduit inéluctablement à une maîtrise plus affinée de certains concepts relatifs aux nombres et aux opérations. Et cette maîtrise rejaillit presque automatiquement sur la manière d'envisager des éléments de réponse à des questions importantes telles que :

- Convient-il de multiplier systématiquement les procédés de calcul rapide ou de mettre en évidence les propriétés des opérations qui régissent ces procédés ?
- Faut-il promouvoir certains points souvent négligés, sinon rejetés comme les nombres entiers négatifs et les multibases ?
- La preuve fait-elle partie intégrante de l'acte mathématique qui consiste à opérer sur les nombres ?
- Est-il opportun de jumeler l'apprentissage des opérations inverses (l'addition et la soustraction, la multiplication et la division) ou, au contraire de les étudier séparément ?

Une bonne connaissance des nombres passe nécessairement par une classification mathématique de ceux-ci, une classification qui – bien sûr – s'élabore progressivement au cours de l'apprentissage.

Des classifications, il en existe assurément dans l'esprit de tous les écoliers. A preuve, le résultat d'un bref sondage effectué à l'issue d'un examen cantonal qui groupait environ 350 élèves prêts à sortir de l'école primaire.
A la question de savoir quelles sortes de nombres ils connaissaient, ces élèves n'ont pas été en reste, comme en attestent leurs réponses très variées :

- des nombres entiers, négatifs, fractionnaires, décimaux ;
- des nombres qui « ne mesurent rien » et ceux qui « mesurent des mètres, des kilos et des litres » (entendons par là des nombres abstraits et des nombres exprimant la mesure des grandeurs) ;
- des nombres pairs, impairs, terminés par des zéros ;
- des nombres qui « tombent juste » et des nombres qui « ne finissent pas » (entendons par là des nombres décimaux limités ou illimités) ;
- des nombres en toutes lettres ;
- des nombres cardinaux, ordinaux, relatifs, entiers, complexes ;
- des nombres premiers « tout seuls » et des nombres premiers entre eux ;
- des nombres d'or, des nombres carrés et des nombres « ronds ».

Au vu de cette énumération quelque peu hétéroclite, trois remarques s'imposent :

1) Les élèves mélangent allègrement expressions consacrées et formulations naïves qui, d'ailleurs, forcent le sourire. Admettons que ce n'est qu'une question de terminologie et passons !
2) Ce qui est le plus préoccupant, c'est le fait que les fractions n'ont été citées par personne, comme si elles n'exprimaient pas des nombres !
3) Enfin, et c'est plus grave encore, cette énumération apporte la preuve d'une juxtaposition de points de vue totalement incompatibles avec un classement logique, susceptible d'éclairer la notion de nombre.

Il existe cependant une classification mathématique des nombres organisée selon un point de vue qui tient à la fois de la logique et de l'histoire.

La débauche d'expressions précédemment signalée prouve à suffisance qu'une connaissance plus fine de la classification mathématique des nombres de la part des enseignants serait de nature à simplifier considérablement l'apprentissage des élèves à ce propos.
Revenons à cette remarque déjà formulée plus haut et qui, à première vue, peut paraître mineure, voire mesquine pour des adultes avertis. Il s'agit de la transposition en mathématique de la confusion qui a cours dans le langage habituel, où sont monnaie courante des expressions telles que :

- *« Voyez les **chiffres** des prévisions budgétaires ! »*, dite par tel Ministre des Finances qui commente un tableau criblé de **nombres** exprimant des milliards !
- *« Mon **chiffre** d'affaire est éloquent ! »*, déclarée par ce commerçant qui serait certainement en faillite s'il n'avait que des chiffres en caisse !

Ce qui est acceptable dans le langage courant ne l'est assurément pas dans langage mathématique, surtout au cours de l'apprentissage, c'est-à-dire au moment où l'enseignant doit contribuer à forger des concepts clairs, nets, précis, sans créer la moindre ambiguïté.

Si la mathématique possède ses propres règles, elle possède également son propre langage.

4.3.3. L’utilisation des signes mathématiques

Le passage prématuré et trop rapide de l’étape de l’intelligence concrète et pratique à celle de l’intelligence symbolique et verbale est certainement la cause de bon nombre d’échecs pédagogiques.

Les enfants dominent-ils aisément le symbolisme mathématique ? Une expérience significative réalisée avec des élèves de 1ère année primaire mérite d’être résumée.

L’instituteur raconte et joue l’histoire suivante : *« je possède 8 billes et les place toutes dans la poche gauche (simultanément, il écrit 8 au tableau). Je possède encore 7 billes et les place dans la poche droite (simultanément, il écrit 7 au tableau à côté du 8. Au total, combien ai-je de billes ? ».*

Les élèves réfléchissent pour arriver collectivement à la bonne réponse, à savoir 15 billes … et l’instituteur écrit 15 au tableau comme suit :

8   7   15

<u>Question</u> :

« Je vous demande à présent de choisir parmi les signes que vous connaissez [+, - , x , : et =] ceux qui conviennent afin de « raconter » mon histoire. »

Après discussion avec les élèves, on finit par écrire : 8 + 7 = 15

L’art d’enseigner étant l’art de mettre l’enfant dans des situations qui l’obligent à comprendre ce qu’il apprend, on propose alors la même histoire, racontée de la même manière … avec la même question, mais l’instituteur a écrit au tableau :

15   8   7

Les enfants paraissent d’emblée embarrassés et on trouve comme réponses :

15 + 8 = 7	ce qui est erroné
15 - 8 = 7	ce qui ne « raconte » pas l’histoire
15 = 8 + 7	pour environ 10 % des élèves !

Face à un tel constat bien entendu insuffisant, on ne peut que mettre en garde les enseignants.

La manipulation des signes mathématiques sans la prise de conscience pleine et entière de leur signification concrète n’est qu’une jonglerie mentale, gratuite et inopérante, qui risque même de scléroser la pensée mathématique. Les signes [+ , - , x , = , …] servent de symboles à des structures opératoires (réunion, partition, égalité, …). Pour que ces signes aient une valeur pratique, ils doivent représenter des structurations suffisamment connues parce que suffisamment vécues et agies. Ces structures doivent donc être bien élaborées AVANT d’employer les signes qui les symbolisent.

Prenons comme contre exemple la notion MOINS et voyons schématiquement le travail à réaliser à l'école maternelle et en 1ère année primaire avant que le signe ne fasse son apparition.
Dans sa vie courante, par ses actions sur et avec les choses, l'enfant vit de multiples situations de soustraction, mais il les vit souvent inconsciemment. La tâche consiste donc à lui faire prendre conscience du résultat de ses actions en l'invitant à une analyse basée sur l'analogie et à une expression verbale de plus en plus précise.

<u>Exemples</u> :

1. Cueillir les fleurs d'un parterre, C'EST COMME enlever les fleurs fanées d'un vase. Après l'opération, il y a MOINS de fleurs dans le parterre, comme dans le vase.
2. Enlever les fleurs fanées d'un vase, C'EST COMME retirer les crayons noirs du plumier.
3. Retirer les crayons noirs du plumier, C'EST COMME …

Faire MOINS, c'est aussi, selon le point de vue adopté :

1. Sortir des jouets de l'armoire, des vaches d'une étable, des outils d'un coffre, des voitures d'un garage, …
2. Verser de l'eau d'une bouteille, de la farine d'un sac, des graines d'un sachet, de l'essence d'un fût, …
3. Donner, manger, éplucher des fruits, …
4. Enlever, découdre, arracher des boutons d'une chemise, …
5. Sucer, offrir des caramels, …
6. Boire, vendre, casser des bouteilles de citronnade, …
7. Payer, prêter, perdre des pièces de monnaie, …
8. Barrer, cacher, gommer des dessins, …
9. …

Toutes ces actions spontanées seront associées, on les exprimera par le geste, par le croquis, … et par la PAROLE afin de les dématérialiser et atteindre ainsi la structure opératoire qui est symbolisée par le signe - !

Alors, mais alors seulement, ce signe sera chargé (c'est le but), d'une véritable signification, les élèves pouvant ainsi l'utiliser et profiter de l'économie de son emploi !

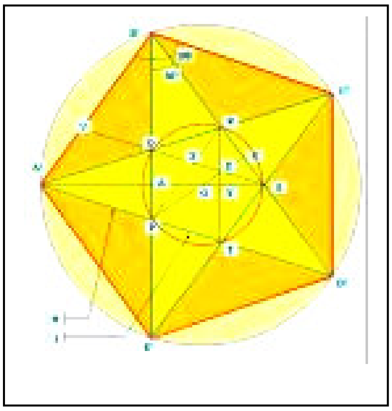
Né de situations concrètes, le signe abstrait retournera non seulement vers d'autres situations (avoir 10 billes et en perdre 3 se traduit par 10 – 3), mais pourra être l'objet de situations nouvelles générées par l'enfant lui-même (10 – 3, c'est aussi planter 10 oignons de tulipe et n'en voir fleurir que 7 … ou c'est encore rater 3 calculs d'une colonne qui en comprend 10) !

Toutes les autres opérations mathématiques naissent également d'une situation fonctionnelle et leur destin est d'y retourner ; l'opération est un outil intellectuel au service d'une pensée mathématique qui s'investit dans le réel. Ce n'est d'ailleurs pas gratuit si les psychologues qualifient la période vécue par l'élève à l'école primaire comme étant l'âge de la pensée opératoire concrète.

4.3.4. Le souci de la preuve mathématique

On a l'habitude de dire que la mathématique est une science exacte.

Cette qualité qu'on lui confère est légitimée par le fait que les mathématiciens ne produisent aucun travail professionnel qui ne soit vérifié dans tous ses détails. Ce faisant, ils n'ont guère de mérite car ce souci leur est naturel ; ils considèrent en effet que la preuve fait partie intégrante de l'acte mathématique : sans preuve, un acte mathématique est un acte tronqué, un acte avorté.



C'est dire toute l'importance que revêt la preuve à leurs yeux ; c'est elle qui cautionne leur travail.

Bien que tous les élèves ne se destinent pas à devenir de futurs mathématiciens, il est souhaitable de tenir compte des exigences de la mathématique et des qualités à promouvoir chez ceux qui l'apprennent.

Autrement dit, il convient de créer le souci de la preuve chez les élèves et de leur faire acquérir des moyens adéquats pour satisfaire ce souci. Ce sont là deux objectifs à conduire de pair, dans un constant va-et-vient : c'est en acquérant des moyens que naît le souci et c'est le souci qui motive de nouvelles recherches de moyens.

Dans le domaine du calcul écrit, la preuve par 9 est pratiquement la seule enseignée, tant dans l'enseignement fondamental que dans l'enseignement secondaire. Et encore, on restreint son usage à la seule multiplication.

Cette restriction dans le champ d'application de la preuve par 9 se double généralement d'une carence au niveau de la prise de conscience de son fonctionnement : on se contente trop souvent de l'utiliser d'une manière purement mécanique.

Si tous les enseignants étaient bien avertis des richesses mathématiques que recèle la preuve par 9, ils lui réserveraient bien meilleur sort et, par ricochet, les élèves en bénéficieraient sûrement.

Avoir le souci de la preuve est une question de motivation qui est largement tributaire des armes dont on dispose pour actualiser ce souci. Lorsque les moyens se réduisent à des mécanismes aveugles, le comportement relève d'un conditionnement et le souci s'efface au profit de l'habitude.

Or, une habitude se perd vite quand les contraintes extérieures s'effacent ; le vrai souci, lui, reste parce qu'il est une contrainte interne.

Compte tenu de la conscience professionnelle qui anime la grosse majorité des enseignants, les progrès à réaliser en pédagogie de la mathématique passent nécessairement par un approfondissement de la matière et par le souci de la preuve. Le manque d'intérêt, voire l'attitude de rejet, manifestés à l'encontre de certaines notions pourtant essentielles de la mathématique, le caractère formellement mécaniste de certaines activités proposées aux élèves, trouvent plus leur origine dans une maîtrise insuffisante de la matière que dans une volonté délibérée des enseignants en quête d'une quelconque facilité.

A force de concevoir les notions mathématiques en fonction de l'utilisation élémentaire qu'on en fait à l'école, on les rétrécit sans le vouloir, sans même en prendre conscience. Ainsi réduites à leur plus simple expression, ces notions n'ont plus le volume suffisant, ni la conscience nécessaire pour dynamiser l'action pédagogique des enseignants, pour les inciter à rechercher des moyens de faire apprendre autrement.

Une connaissance étroite de la matière s'accommode parfaitement des problèmes FERMÉS que l'on enseigne au besoin. Une connaissance plus large et plus profonde de la matière génère des problèmes OUVERTS qui font chercher, puisqu'on sait qu'il reste des choses à trouver … et donc à prouver.

4.3.5. Exemple d'activités sur les nombres

Les activités qui vont suivre sont étudiées au 1er degré de l'enseignement secondaire.

<u>1ère année</u>

- <u>Activité 1 : chiffres et nombres</u>

  Dénombrement numérique, nombres naturels, propriétés de l'addition et de la multiplication dans N utilisées pour faciliter les calculs, représentation des naturels sur une droite graduée, comparaison et classement des nombres naturels.

- <u>Activité 2 : priorités des opérations</u>

  Jeu des chiffres, construction d'expressions numériques utilisant plusieurs opérations, découverte des règles de priorité des opérations, codage et décodage d'expressions, première approche de la distributivité (78 . 99) et de la mise en évidence (3,21 . 3 + 3,21 . 7).

- <u>Activité 3 : diviseurs et multiples</u>

  Jeu « *Grilmul* » (placer les naturels de 1 à 9 dans chaque case d'un carré de 3 sur 3 si on connaît le produit de chaque ligne et de chaque colonne), dessiner tous les rectangles de dimensions différentes que l'on peut former à l'aide de 24 petits carrés identiques, ensemble des diviseurs d'un nombre, nombres carrés (nombres qui possèdent un nombre impair de diviseurs), nombres rectangles (nombres qui possèdent un nombre pair de diviseurs), nombres premiers (nombres qui possèdent exactement 2 diviseurs), distinguer diviseur et multiple, propriétés de la divisibilité, caractères de divisibilité, crible d'Eratosthène, décomposition d'un nombre en un produit de facteurs premiers, représentation géométrique de l'ensemble des diviseurs d'un nombre à l'aide d'un treillis, utilisation des puissances pour simplifier l'écriture d'un produit de facteurs égaux, puissances de 10, élargissement des règles de priorité des opérations aux puissances.

- Activité 4 : nombres figures

  Nombres triangulaires et somme des n premiers naturels.
  Nombres carrés et somme des n premiers nombres impairs.

- Activité 5 : nombres entiers

  Rencontre avec les nombres négatifs, représentation sur la droite graduée, opposé d'un entier, valeur absolue d'un entier, comparaison et classement, somme de 2 nombres entiers, propriétés de l'addition dans Z, somme de plusieurs entiers, différence de 2 nombres entiers, équations et problèmes x + a = b, suppression des parenthèses, produit de 2 nombres entiers, propriétés de la multiplication dans Z, produit de plusieurs entiers, priorité des opérations dans Z, équations et problèmes a . x = b, équations et problèmes a . x + b = c.

- Activité 6 : nombres décimaux et fractions

  Calcul avec des décimaux, valeur approchée d'un quotient, écriture d'un quotient sous la forme d'une fraction, représentation d'un décimal et d'une fraction sur la droite graduée, multiplier un nombre par une fraction, fractions égales, écritures fractionnaires d'un nombre décimal, comparaison et encadrement des nombres décimaux, comparaison des fractions, addition, soustraction et multiplication des fractions.

- Activité 7 : construction d'expressions algébriques

  Composition d'opérateurs (+2 et +3, .2 et .3, +2 et -3, :2 et :3, :2 et .3, .3 et +7, carré et .3, carré et +5), rechercher si l'on peut commuter les 2 opérateurs avec des essais de nombres naturels, entiers et décimaux, construction d'expressions avec un nombre quelconque x, mise en place des conventions d'écriture, deuxième approche de la distributivité .

- Activité 8 : distributivité et mise en évidence

  Calcul du périmètre et de l'aire de figures géométriques dont les dimensions sont exprimées à l'aide de lettres, réduction de sommes et de produits, transformer un produit en une somme ou une différence (distribuer), transformer une somme ou une différence en un produit (mettre en évidence) .

- Activité 9 : grandeurs proportionnelles

  Comment reconnaître une situation de proportionnalité, utiliser une échelle.

- Activité 10 : traitement de données

  Repérer un point dans le plan, interpréter un tableau, un graphique, représenter des données par un diagramme, un graphique.

2ème année

- Activité 1 : calcul dans Z

  Addition, soustraction, multiplication, puissances, division, priorité des opérations, équations et problèmes a . x + b = c . x + d.

- Activité 2 : diviseurs et multiples

  Ensemble des diviseurs d'un nombre, ensemble des multiples d'un nombre, nombres premiers entre eux, division euclidienne, somme des n premiers nombres pairs (sauf 0), somme des n premiers nombres impairs, PPCM et PGCD.

- Activité 3 : fractions

  Ecriture d'une fraction sous la forme d'un nombre entier, décimal limité, ou décimal illimité périodique, addition, soustraction, multiplication et division des fractions, représentation des fractions sur la droite graduée, fractions égales, opposé et inverse d'une fraction, simplification d'une fraction, transformation d'écritures fractionnaires en écritures décimales et inversement, comparaison et classement des fractions, valeurs approchées et encadrement.

- Activité 4 : puissances

  Produit de puissances de même base, quotient de puissances de même base, puissance d'un produit, puissance d'un quotient, puissance d'une puissance, puissances de 10 à exposants entiers, notation scientifique.

- Activité 5 : expressions algébriques

  Construction d'expressions littérales de l'aire, du volume, de la longueur totale des arêtes de solides dont les dimensions sont exprimées à l'aide de lettres, utilisation des propriétés de l'addition et de la multiplication pour simplifier les écritures.

- Activité 6 : proportions

  Egalité de 2 rapports, propriété fondamentale des proportions, proportionnalité de 2 suites de nombres, relation tableau-graphique-formule.

- Activité 7 : produits remarquables

  Puzzles et constructions des égalités remarquables.

- Activité 8 : exploitation de données statistiques

  Effectif, fréquence, mode, moyenne, diagramme en bâtons, diagramme circulaire.

4.4. A propos des grandeurs et des mesures

Il aurait été incomplet de traiter ce vaste sujet qu'est l'apprentissage de la mathématique sans évoquer deux de ses composantes tout aussi fondamentales.

L'importance primordiale que revêt l'apprentissage de la géométrie et des nombres dans la formation mathématique des élèves dès leur plus jeune âge doit leur permettre, très vite, d'associer deux autres notions tout aussi essentielles, celle des grandeurs et celle des mesures.

En effet, les activités liées aux grandeurs et aux mesures font intervenir, en étroite imbrication, des notions géométriques et des notions numériques ; l'apprentissage simultané de toutes ces composantes de la mathématique contribuent à une meilleure compréhension, donc à une plus grande maîtrise des unes par rapport aux autres.

La perception de l'espace environnant passe souvent par le recours à des mesures : distance entre deux lieux (associée à la *longueur* du chemin qui relie ces deux lieux) ; superficie ou étendue (expression courante pour désigner l'*aire*) d'une pièce à carreler ou à peindre ; *volume* d'un ingrédient en cuisine ; *durée* d'un film, etc.

Une fois bien comprises les notions de géométrie et des nombres, les élèves pourront aisément acquérir des connaissances et des compétences spécifiques relatives à différentes mesures.

La construction de ces connaissances s'appuie sur un travail préalable consacré aux grandeurs auxquelles ces mesures sont associées.

Prenons par exemple un objet cubique. Il est possible d'associer diverses grandeurs à cet objet :

- une *contenance* (un *volume*), qui correspond à la quantité d'eau qui pourrait le remplir ;
- une *masse* : celle-ci dépend de la matière dont est constitué la *contenance* ;
- des *aires*, celle d'une face ou de l'aire totale de toutes ses faces ;
- des *longueurs*, celle d'une arête ou la longueur totale de ses arêtes.

Comme pour les autres domaines de la mathématique, l'enseignant doit être vigilant sur le langage utilisé pour évoquer les grandeurs. Il n'est d'ailleurs pas conseillé d'utiliser le mot *grandeur* en classe : il est préférable de le remplacer par *longueur*, *masse*, *aire*, etc., selon le contexte.
Les mots du domaine des longueurs sont assez nombreux. Sans être exhaustifs, citons :

- *hauteur* d'une construction, d'un arbre (par contre, la *hauteur* du soleil est un angle) ;
- *altitude* d'un sommet, d'un avion en vol ;
- *profondeur* d'une piscine, d'une armoire ;
- *taille* d'une personne ;
- *tour* de cou, de taille ;
- *distance* entre deux lieux, deux points ;
- *largeur* d'un fleuve, d'un rectangle ;
- *périmètre* d'un polygone ;
- *circonférence* d'un cercle.

Il est important pour l'élève que ces mots, utilisés dans des contextes différents, se réfèrent au même concept, appelé en langage mathématique *longueur*.

Une fois bien comprise la notion des grandeurs, il devient alors possible d'associer à chaque grandeur un nombre, appelé « sa mesure relativement à cette unité ».

Remplacer une grandeur par un nombre présente un grand intérêt. En effet, il est alors possible de :

- communiquer sur la grandeur des objets grâce aux nombres rapportés à une unité ;
- fabriquer un objet dont la grandeur est donnée par un nombre rapporté à une unité ;
- comparer des objets selon une grandeur en leur attribuant un nombre ou en utilisant des encadrements entre deux nombres, ces nombres étant rapportés à une unité.

Il est important de placer les très jeunes élèves en situations réelles en les faisant eux-mêmes réaliser des formes géométriques en trois dimensions. Comme en géométrie, il est également important de les placer dans des situations réelles de mesurage.

Pour qu'une activité sur le mesurage soit comprise par le plus grand nombre, il ne s'agit pas d'exiger une précision exemplaire, mais au contraire de faire prendre conscience des approximations liées à la taille des objets, à la précision des instruments et aux conditions de leur utilisation.

Il est en effet plus profitable à l'élève de d'abord savoir estimer la mesure en elle-même avant de procéder au mesurage proprement dit à l'aide d'instruments de mesure.

Par exemple, parcourir la classe pour en estimer sa longueur et sa largeur peut se faire en considérant qu'une enjambée normale équivaut à plus ou moins 1 mètre. La longueur et la largeur de sa classe estimées par ce procédé, l'élève pourra, grâce à la formule « longueur x largeur », découvrir l'*aire* de sa classe. Une fois devenu adulte et fort de cet exemple pratique, l'élève pourra plus tard, sans trop se tromper, estimer l'aire du terrain à bâtir qu'il convoite pour la construction de sa maison.

Quoi qu'il en soit, l'usage adapté du « bon mot » doit être connu le plus tôt possible des élèves lors de leur formation et l'enseignant doit veiller à utiliser correctement ce vocabulaire et engager les élèves dans des mises en relation comme, par exemple, rattacher au domaine des longueurs tous les mots qui l'évoquent.

Nous arrêterons ici d'évoquer les grandeurs et les mesures tant l'apprentissage de ces notions de la mathématique relève des mêmes mécanismes que ceux évoqués plus avant dans ce rapport.

Le plus important est que, dans l'apprentissage de chacune des composantes de la mathématique (géométrie, nombres, grandeurs, …), les élèves saisissent bien les différentes interactions que ces notions ont entre elles pour qu'ils puissent véritablement prendre conscience de leur sens indissociable l'une de l'autre (*science sans conscience n'est que ruine de l'âme*).

4.5. Quelques outils pédagogiques utiles

Les Polydron Frameworks©

Voir supra.

Les réglettes « *Cuisenaire* »

La méthode de calcul inventée par l'instituteur thudinien Georges CUISENAIRE utilise un ensemble de réglettes de couleurs qui aident les enfants à apprendre le calcul.

Le matériel « *Cuisenaire* » permet à l'enfant de découvrir toute une série de notions fondamentales préparatoires à l'acte de calculer (relations couleurs-longueurs-volumes, relations d'équivalence et de non-équivalence, précision du vocabulaire …).

La phase qualitative implique la manipulation libre des réglettes sans en donner de valeur numérique, seule la couleur est nommée.

En donnant une valeur conventionnelle aux réglettes, la phase quantitative contribue à la construction des nombres et des opérations.

A chaque étape, l'enfant peut travailler seul, à son rythme en utilisant ses mains mais aussi ses yeux, il aura ainsi la possibilité d'élaborer son système de calcul, de le développer et de l'extrapoler.

Ces réglettes constituent donc un matériel riche en potentialités mathématiques. Elles s'utilisent de la maternelle à la 6ème année primaire. Elles peuvent s'insérer dans les méthodes de calcul ou constituer elles-mêmes une méthodologie active, intégrée au calcul.

Elles s'inscrivent dans une triple structure :

1. Linéaire : les trains.
2. Géométrique : les carrés, les rectangles, les périmètres, les aires.
3. Spatiale : les constructions, les tours, les volumes.

Les « Tangram »

De la maternelle à la fin du primaire (et même au-delà …), les ***Tangram*** constituent à la fois un jeu d'intelligence et un outil mathématique. Ils sont composés de 7 pièces géométriques (1 carré, 1 parallélogramme et 5 triangles isocèles de grandeurs différentes).

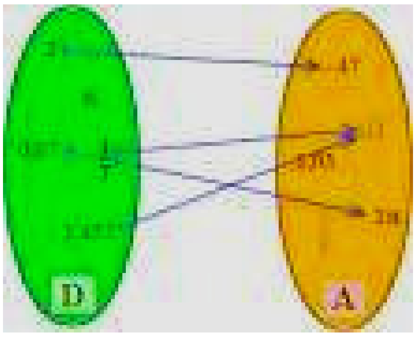
Ce jeu s'apparente à un puzzle et développe chez l'enfant observation, concentration, structuration spatiale, réflexion, …

Il lui permet aussi de pénétrer dans l'univers de la mathématique et plus particulièrement dans celui de la géométrie (y compris la géométrie des transformations). Ces figures plongent les enfants dans le royaume des formes géométriques et de leurs propriétés. Mais elles permettent également d'aborder le domaine des fractions grâce au choix judicieux de leurs mesures.

Les Attrimaths©

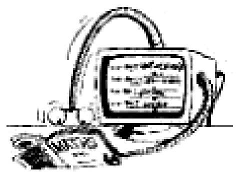
Ce sont de petits blocs en matière plastique qui ont 6 attributs « formes » et 6 attributs « couleurs » et des relations entre eux (à chaque forme correspond une couleur).

Ce matériel permet, à l'école primaire, d'introduire des notions d'arithmétique (nombres et opérations, propriétés des opérations, partage, équivalence) et de géométrie (figures planes, périmètre, aire, translations, rotations, symétries).



Un ***diagramme de Venn*** est une représentation d'un ou plusieurs ensembles par des lignes simples fermées dans lesquels les éléments d'une réalité sont distribués. Il s'agit d'une manière d'illustrer une situation en utilisant une méthode visuelle. Le ***diagramme de Venn*** permet de faire des déductions menant à la résolution d'un problème. Cette représentation est notamment utile dans l'installation de la démarche logique chez l'enfant ainsi que pour aborder les notions de : tous, aucun, certains, la plupart, ….

<u>Le « CABRI géomètre »</u>



Le **CA**hier de **BR**ouillon **I**nteractif est un logiciel de géométrie développé au début des années quatre-vingts par l'Université de Grenoble pour des élèves du secondaire.
L'ordinateur permet de dissocier l'habileté manuelle de l'élève de ses connaissances mathématiques nécessaires pour réaliser des figures géométriques sur papier.
L'ordinateur trace fidèlement ce qui lui est demandé, sans erreur.
Bien entendu, ce logiciel, quoi que très intéressant, ne peut suffire à lui seul à l'apprentissage de la géométrie.

CHAPITRE 5 : PISTES POUR UN MEILLEUR APPRENTISSAGE DE LA MATHEMATIQUE

5.1. Objectifs

Les propositions ci-dessous ont pour objectifs de :

1. former progressivement et naturellement tous les élèves dès leur plus jeune âge et pendant toute leur scolarité obligatoire :
    - ✓ aux concepts mathématiques ;
    - ✓ aux premiers éléments et aux premières règles de la logique formelle ;
    - ✓ au raisonnement scientifique.

Ces concepts sont nécessaires pour appréhender des domaines aussi variés que la physique, la chimie, la biologie, l'économie, l'architecture, la démographie, les technologies actuelles, l'informatique, la cristallographie, ... ;

2. lutter efficacement contre l'échec scolaire en mathématique en établissant une cohérence de théorie et de méthodologie sur tout l'enseignement obligatoire ;
3. aider les jeunes enseignants à percevoir la progression des contenus (année par année) dans leurs cadres théoriques, ainsi que les démarches (savoir-faire) que les élèves doivent s'approprier.

5.2. Pistes pour une amélioration de l'apprentissage de la mathématique

5.2.1. Pour l'enseignement obligatoire

Il semble opportun de distinguer 2 phases d'apprentissage :

1. **<u>La mathématique de base (de 5 à 14 ans)</u>**

   La mathématique de base doit permettre à tout individu d'accéder par la suite à tous les types de formations.

2. **<u>La mathématique orientée (de 15 à 18 ans)</u>**

   La mathématique orientée se subdivise en deux catégories :
   1. la mathématique orientée préparatoire à l'enseignement supérieur et universitaire ;
   2. les mathématique orientée à l'intention de l'enseignement qualifiant.

1. <u>La mathématique de base (de 5 à 14 ans)</u> :

Les fondements de la "mathématique de base"

SAVOIR

Contenus obligatoires de base:
- Géométrie des Transformations dans le plan et dans l'espace(*)
- Nombres
- Grandeurs
- Problèmes (math utilitaire)
- "Premiers éléments" d'algèbre
- "Premiers éléments" d'analyse (lecture de graphiques…)

SAVOIR-FAIRE

- Démarche scientifique de base(*)
- Logique formelle de base (premiers éléments et premières règles) (**)

(*) Demandés dans les Socles de Compétences (Communauté française de Belgique) et dans le rapport KAHANE (France).

(**) Ces exigences ne sont pas sans conséquences sur les contenus à enseigner et sur l'ordre des matières.

2.1. <u>Mathématique orientée préparatoire à l'enseignement supérieur et universitaire</u> :

Mathématique générale

SAVOIR

Mathématique GENERALE
(Math 2 h - Math 4 h - Math 6 h)
Math pure + Math appliquée
(Matières à moduler selon le nombre d'h/semaine)

- Géométrie des Transformations dans le plan et dans l'espace(*)
- "Éléments" d'algèbre
- Trigonométrie
- "Éléments" d'analyse
- Statistique – Probabilité
- Géométrie vectorielle
- Géométrie analytique
- Mathématique financière

SAVOIR – FAIRE

- Démarche scientifique de base(*)
- (**)Logique formelle de base (premiers éléments et premières règles)

2.2. <u>Mathématique orientée à l'intention de l'enseignement qualifiant</u> :

Enseignement qualifiant

SAVOIR

Math utilitaire

Matières à compléter et à moduler selon le nombre d'h/semaine et les orientations.

SAVOIR - FAIRE

- Démarche scientifique de base(*)
- (**)Logique formelle de base (premiers éléments et premières règles)

(*) Demandés dans les Socles de Compétences (Communauté française de Belgique) et dans le rapport KAHANE (France).
(**) Ces exigences ne sont pas sans conséquences sur les contenus à enseigner et sur l'ordre des matières.

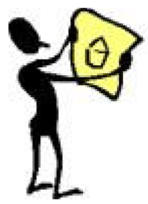
5.2.2. Création de curriculums

Pour chaque filière et à l'intention des jeunes enseignants, il semble utile :

a) de rappeler la nécessité de prévoir une cohérence de théorie, une continuité de matière, une méthodologie adaptée à chaque matière enseignée et au niveau des élèves ;
b) de prévoir un curriculum pour les matières à enseigner.

Traditionnellement, un curriculum décrit « tout » ce qui concerne l'enseignement d'une matière et se compose de quatre parties :

1. un descriptif ± succinct du « *savoir* » à enseigner (le cadre théorique) ;
2. un descriptif du « *savoir-faire* » correspondant au « *savoir* » à enseigner (pour la mathématique, il s'agit de la démarche scientifique) ;
3. un descriptif des procédés méthodologiques et pédagogiques adoptés.
   Les procédés peuvent évoluer et varier en fonction du degré de connaissances et de compétences des élèves. Les procédés principaux sont :
   - l'utilisation de l'imaginaire (conte adapté) ;
   - l'enseignement génétique (J.-S. BRUNER*) ;
   - l'enseignement en spirale (E. WITTMANN*) ;
   - les situations - problèmes utilitaires et pures ;
   - les défis ;
   - les résolutions de problèmes ;
   - l'enseignement de la géométrie dès le plus jeune âge ;
   - …
4. un descriptif, année par année, du contenu des activités à enseigner.



Remarques :

- vu l'ampleur du travail, les curriculums ne doivent pas être élaborés individuellement par des enseignants mais par des équipes composées *d'enseignants de terrain expérimentés et aussi de spécialistes* ayant une vue d'ensemble de la théorie à enseigner sur une longue période d'apprentissage (par exemple : de 5 à 18 ans) ;

- ces curriculums seront proposés après une expérimentation obligatoire dans des classes "ordinaires" ;

- ces expérimentations se feront en assurant le cours concrètement, en continu et avec les mêmes élèves, et ce pour une période assez longue s'étalant par exemple durant la scolarité des 5 à 14 ans pour l'enseignement de base et durant celle des 15 à 18 ans pour l'enseignement général et qualifiant ;

- il sera demandé d'insérer obligatoirement dans les curriculums :
  - ✓ des photos illustrant les activités réelles des enfants ;
  - ✓ la description du matériel utilisé ;
  - ✓ les réactions des élèves lors des leçons données.

La création de curriculums créera automatiquement la cohérence, la continuité et l'acquisition progressive des « savoirs » et des « savoir-faire » pendant toute la période de formation des élèves.

---

* Cf. bibliographie en annexe.

5.2.3. Considérations sur la formation en mathématique

a) Il faut rappeler que tel ou tel matériel pédagogique convient mieux à telle ou telle activité.
Il est donc important de faire, pour chaque activité, le choix qui s'impose.
Les manipulations du matériel adéquat (par les élèves eux-mêmes) permettent l'expérimentation, et les bons « modèles » fixent les bonnes images mentales et l'appropriation des concepts mathématiques.

b) A l'origine, la mathématique est aussi une science expérimentale !
Au cours des expérimentations et de l'expression orale des « découvertes » faites par les élèves, insister sur la nécessité d'initier progressivement les élèves à exprimer les premiers éléments de logique qui favorisent la compréhension.

c) Nous insistons sur le rôle et l'importance de la démarche scientifique dans la formation de base.
La démarche scientifique est codifiée, elle obéit à des règles strictes.
C'est la raison pour laquelle les premiers éléments et les premières règles de logique doivent être introduits très tôt : lorsqu'ils sont associés à des matières concrètes, ils sont parfaitement assimilables par de jeunes enfants.

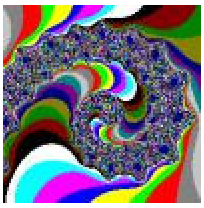
d) Il faut souligner, pour le choix et l'enseignement des matières, l'importance de prévoir les « spirales–génétiques » qui respectent les niveaux de connaissance et de compétence des élèves.
A ce propos, nous croyons utile d'évoquer de manière succincte les principes de l'enseignement en spirale et ceux de l'enseignement génétique.

1. <u>Les principes de l'enseignement en spirale</u>

Les trois principes de l'enseignement en spirale, proposés par J.-S. BRUNER dans les années soixantes, doivent présider à l'établissement de tout curriculum scolaire. Ces principes sont les suivants :

Principe 1 – *« Les matières (et le savoir-faire) que nous décidons d'enseigner doivent être d'un intérêt permanent pour tous les élèves au cours de toute leur formation et ce qui est important doit apparaître le plus tôt et le plus souvent possible. »*

Principe 2 – *« Les principaux sujets méritent d'être étudiés plusieurs fois, chaque nouvelle présentation incluant à la fois de nouvelles approches et un plus haut degré de sophistication. »*



Principe 3 – *« L'étude doit débuter à un niveau de base où les concepts sont manipulés par l'élève même s'il n'en perçoit pas immédiatement la portée finale.*

Néanmoins, l'élève ne doit être amené à continuer à exercer ses capacités mathématiques à un niveau de base que si, par la suite, il est capable de progresser à un niveau supérieur, ce qui signifie qu'il soit capable de réfléchir sur ses capacités de base. »

2. Les principes de l'enseignement génétique

Le troisième principe de l'enseignement en spirale montre l'importance « de partir du terrain » des élèves. Il est indispensable d'être attentif et de respecter le niveau de connaissances et des capacités intellectuelles de chaque enfant en intégrant les principes de l'enseignement en spirale à ceux de l'enseignement génétique.

La théorie de la « méthode génétique » fut développée et co-fondée par F. KLEIN, O. TOEPLITZ, H. FREUDENTHAL, A. KRYGOWSKA, A. WITTENBERG, M. WAGENSCHEIN, J. PIAGET[*], J.-S. BRUNER ainsi que D. et P.- M. VAN HIELE. La caractéristique essentielle pour tous ces auteurs est que seul le processus de mathématisation, et non le produit fini, permet de comprendre et d'**apprendre** correctement la mathématique.

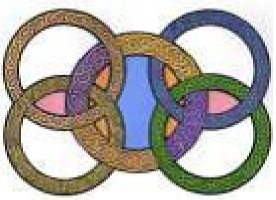
Cette méthode a notamment été diffusée par E. WITTMANN. Pour lui, *« enseigner les mathématiques, c'est faire des mathématiques avec les élèves dans le but de cultiver, d'enrichir leur compréhension de la réalité ; dans cette approche des mathématiques, l'accent est mis à la fois sur les composantes du développement de l'apprenant et sur celles du développement de la matière. »*

Pour atteindre ces objectifs, l'auteur considère que la *« méthode génétique »* doit avoir les caractéristiques suivantes :

- il faut se référer aux connaissances préalables des personnes concernées ;
- il faut intégrer des raisonnements dans des contextes de problèmes globaux **au sein** et en dehors des mathématiques ;
- il faut arriver à des **raisonnements rigoureux** à partir d'éléments intuitifs et heuristiques ;
- il faut arriver à une motivation constante et à une **continuité permanente**.

Selon WITTMANN, la réussite de cette méthode dans l'enseignement suppose :

« - de constituer un tout cohérent ;
- de couvrir une liste de notions de base avec une bonne maîtrise du savoir-faire ;
- d'inclure des ***démonstrations*** *abordables par les élèves et les professeurs ;*
- que l'enseignement puisse se faire ***dans le temps imparti*** *;*
- que l'effort exigé du professeur ne soit pas augmenté. »



Dès lors, une initiation **complète** à la pensée mathématique par la méthode génétique doit, dès l'école primaire, non seulement se concevoir sur base de problèmes utilitaires (en dehors de la mathématique), mais également sur base de problèmes pris au **sein même** de la mathématique, en incluant des **raisonnements rigoureux** et des **démonstrations** adaptées au niveau des enfants.

e) Nous évoquerons également l'importance que revêtent les « situations problèmes utilitaires » et les « situations problèmes pures » dans l'apprentissage des élèves.

La méthodologie actuellement prônée pour l'initiation à la mathématique à l'école primaire est celle des situations problèmes **utilitaires**. De plus, ces situations problèmes présentées aux enfants sont des situations qui ne demandent généralement pas d'utiliser des concepts théoriques rencontrés précédemment ni d'argumenter les observations.

[*] Cf. bibliographie en annexe.

Cette approche de la mathématique, pour enrichissante et indispensable qu'elle soit, pourrait laisser croire aux enfants :

1) qu'ils sont capables seuls de résoudre les problèmes sans utiliser les notions rencontrées auparavant ;
2) qu'il n'est pas indispensable de stocker en mémoire les concepts déjà rencontrés alors que la mémoire est un des moteurs de tout travail intellectuel ;
3) qu'il n'existe pas de liens entre les concepts puisqu'ils ne sont pour ainsi dire jamais transférés d'une situation à l'autre.

De ce fait, les enfants n'ont qu'une vision ponctuelle et fragmentaire de l'activité mathématique puisque l'accent n'est mis que sur l'observation, la manipulation, la construction, le dessin, la description.

Or, comme le précise B. CHARLOT[*] : *« il ne faudrait pas considérer **uniquement** les mathématiques et la pensée mathématique comme une boîte à outils pour résoudre des problèmes de la vie quotidienne. »* Il ajoute même : *« qu'il est très difficile de travailler à partir du concret et de l'utile, de sorte que l'on propose souvent aux élèves du pseudo-concret, du pseudo-utile qui les embrouille et les détourne davantage encore de l'activité mathématique »* ; il continue en affirmant qu'il croit *« qu'une démarche de construction du concept mathématique doit s'appuyer sur un problème intéressant en **tant que tel** et non sur un besoin utilitaire d'une solution au problème posé. »*

Cette dernière approche de la mathématique est qualifiée d'approche par les « situations problèmes pures » par opposition aux « situations problèmes utilitaires. » Cette méthode est non seulement très bien acceptée par les enfants mais elle facilite la découverte d'autres concepts apparentés, ce qui permet de mettre en évidence les liens les unissant et d'habituer les enfants à la notion de « théorie déductive ». Nous ne réfutons pas les « situations problèmes utilitaires », car celles-ci permettent d'approfondir et d'affiner le sens des concepts mathématiques rencontrés. Toutefois, nous sommes convaincus qu'il est souhaitable, dans l'enseignement primaire, d'aborder en premier lieu les concepts géométriques dans le cadre de « situations problèmes pures ».

Par ailleurs, nous sommes de plus en plus convaincus qu'aborder la mathématique **uniquement** par les « situations problèmes utilitaires » renforce les inégalités à l'accès aux concepts et au « jeu » mathématique car seuls les élèves « subtils » sont capables d'utiliser, de s'approprier et de retenir, à travers les résultats utilitaires, les concepts mathématiques sous-jacents.

L'approche inverse montre que les moins « perspicaces » ou ceux qui ont des difficultés de passage à la phase d'abstraction accèdent aux solutions utilitaires en utilisant à bon escient les concepts abordés auparavant.

[*] Cf. blibliographie en annexe.

f) Faut-il encore rappeler toute l'importance d'établir une cohérence, une continuité et une progressivité dans les apprentissages des différents concepts enseignés à l'école, non seulement d'année en année, mais « latéralement aussi », c'est à dire par rapport aux matières et aux travaux interdisciplinaires ? Ceci, dans le souci de donner du sens à l'apprentissage de toutes les matières qui, bien qu'enseignées chacune séparément, ont souvent des interactions entre elles.

g) Enfin, l'importance du référent théorique est capitale. C'est pourquoi nous insistons une fois encore sur toute l'importance de « travailler » chaque matière en tenant compte d'un cadre théorique structuré.
La mise en place d'un tel cadre implique l'ordonnancement, la structuration des matières à enseigner de façon telle que celles-ci se complètent naturellement, avec le plus de cohérence possible. Mais cette nécessité n'induit certainement pas de devoir redéfinir toute l'axiomatique.

5.2.4. Formation initiale des enseignants

a) Pour les bacheliers (instituteurs maternels et primaires ainsi que pour les régents), il conviendrait d'augmenter le nombre d'heures de cours de mathématique et de méthodologie spéciale en mathématique et d'augmenter les contacts avec des enseignants de terrain expérimentés, avant les stages pratiques.

b) Pour l'agrégation des licenciés en sciences-mathématiques, il conviendrait également d'augmenter le nombre d'heures de méthodologie spéciale en mathématique et d'augmenter sensiblement les contacts avec des enseignants de terrain expérimentés pour chaque type d'enseignement (technique – professionnel – général), avant les stages pratiques.

5.2.5. Formation continuée des enseignants

Pour les formations continuées, il y aurait lieu de proposer plus de formations combinant à la fois la présentation théorique et didactique ainsi que la description des activités *réellement* réalisées en continu dans les classes et à travers tout l'enseignement (fondamental et/ou secondaire).

5.2.6. Enseignants de terrain et futurs enseignants

Pour conduire à l'uniformisation de la matière enseignée, il y a lieu d'augmenter la diffusion d'outils pédagogiques réellement testés en classe par des enseignants.
A cet égard, on peut se réjouir de ce que le *Contrat pour l'Ecole* adopté le 31 mai 2005 par le Gouvernement de la Communauté française de Belgique énumère, au nombre de ses priorités, celle de faire diffuser largement les « bonnes pratiques » (fiches pédagogiques, syllabus…) créées, notamment, par des enseignants de terrain.

5.2.7. Quelques réflexions

Les quelques suggestions et recommandations qui précèdent :

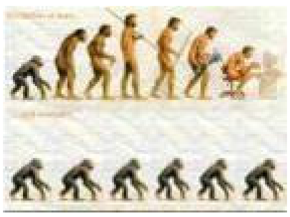
- ne demandent pas de modification des structures actuelles de l'école ;
- ne demandent pas de moyens financiers supplémentaires ;
- sont utiles pour la formation des futurs enseignants ;
- sont utiles pour les jeunes enseignants débutant dans le beau mais néanmoins difficile métier d'enseignant ;
- ne sont aucunement pénalisantes pour les enseignants expérimentés ;
- paraissent nécessaires pour inverser la tendance actuelle des résultats (très moyens) en mathématique d'une grande majorité des élèves de la Communauté française de Belgique.

CONCLUSION

« Le livre de la nature est écrit dans un langage mathématique. »

Ces mots et d'autres prononcés en 1632 devant le tribunal ecclésiastique qui l'accusait d'hérésie faillirent envoyer Galileo GALILEI au bûcher.
Pour éviter le terrible châtiment, notre homme dut abjurer ses propos.
GALILÉE quitta ses juges, eux qui savaient si bien parler, lire et écrire, en susurrant ces mots :
« et pourtant … , elle tourne.»

Près de quatre siècles plus tard, la terre tourne encore et toujours autour du soleil et plus personne ne le conteste aujourd'hui. Le bon sens et la raison l'ont emporté.



Les théories coperniciennes défendues par GALILÉE étaient-elles importantes pour l'Humanité ? DARWIN avait-il raison de s'interroger sur notre degré de parenté avec les singes ? Faut-il condamner les recherches actuelles sur les biotechnologies ? Occulter ces questions ou, pire, leur donner des réponses complaisantes, reviendrait à rallumer les bûchers. New York … Madrid … Londres … Veut-on entraîner notre monde dans la spirale de l'obscurantisme ?

Tout au long de ce rapport, nous avons insisté sur l'importance capitale que revêt l'apprentissage de la mathématique comme instrument de la conquête de notre environnement et du monde.

GALILÉE avait raison : la nature, notre environnement, sont véritablement écrits dans un langage mathématique.

Mais avant de chercher à savoir décoder ce langage, il faut d'abord pouvoir lui donner du sens.
C'est l'activité mathématique qui lui donnera ce sens, en deux phases distinctes mais complémentaires. Continuellement, ces deux phases s'interpénètrent : une phase inductive et une phase déductive.

Tout en procurant les mécanismes du raisonnement logique, la mathématique possède elle-même sa propre logique interne. Il est indispensable que les différentes composantes qui la constitue (géométrie, algèbre, grandeurs, …) soient enseignées avec le plus de cohérence possible.

Démontrer aux élèves que la mathématique aide à la compréhension des autres sciences ne peut se faire sans leur démontrer dans le même temps que la mathématique répond elle-même à des règles. Ces règles, associées les unes aux autres dans un ordre structuré, facilitent l'apprentissage de la mathématique.

Nous avons souligné pour ce faire l'importance d'enseigner la mathématique aux élèves, dès leur plus jeune âge, à l'aide de techniques et d'outils pédagogiques spécifiques et adaptés.
Et si l'outil informatique peut se révéler très précieux dans les méthodes d'apprentissage, des moyens plus conventionnels conservent toute leur pertinence.

Aussi, tant les programmes scolaires que les supports pédagogiques gagneraient en clarté et en efficacité s'ils se structuraient entre eux afin que l'enseignement de la mathématique soit plus uniforme, plus cohérent, dans chaque école, à chaque stade de l'apprentissage.

Le temps imparti pour enseigner se heurte de plein fouet au temps nécessaire pour apprendre.

Pour des élèves supposés égaux et dociles, qui ne seraient jamais malades, jamais absents, jamais rêveurs …, rien, ou presque, n'est à changer dans notre système éducatif.
Pour les autres, ceux que l'étude PISA 2003 nous révèle être assez nombreux, il est crucial de repenser les méthodologies d'enseignement en fonction du temps scolaire disponible.

Mieux structurer l'apprentissage de la mathématique, notamment par la création systématique de curriculums, ne peut qu'induire une meilleure gestion du facteur « temps d'apprentissage ».
Ce qui se conçoit bien s'énonce clairement.

Il est essentiel que nous prenions toutes et tous conscience que la mathématique est d'une importance capitale pour le progrès de notre société. L'apprentissage de la mathématique, harmonisé à celui des autres domaines de la connaissance, constitue un élément majeur, tant pour le développement personnel de nos jeunes que pour leur insertion positive dans la société.

Le *Contrat pour l'Ecole* rejoint certaines des pistes avancées dans ce rapport. Nous sommes conscients qu'il faudra à la fois du temps, des moyens et des efforts pour que les idées que contiennent l'un et l'autre portent leurs fruits.

Le défi est aussi ambitieux que les résultats escomptés sont grands.

Nous invitons tous les acteurs du monde de l'enseignement et particulièrement les mathématiciennes et les mathématiciens, les élèves et leurs parents, les pouvoirs organisateurs de chaque réseau scolaire ainsi que la classe politique à centrer leurs efforts sur cette vision d'aujourd'hui pour en faire une réalité de demain.

Au nom de mes « canailloux » et du bon sens qu'ils veulent acquérir et amplifier, que chacun en soit remercié par avance.

REMERCIEMENTS

Ce rapport sur l'apprentissage de la mathématique n'aurait pas existé sans la précieuse collaboration de femmes et d'hommes de terrain, actifs ou retraités, et d'assistants parlementaires, toutes et tous plus dévoué(e)s les un(e)s que les autres à la cause de l'enseignement de la mathématique.
Je tiens à leur réitérer mes plus vifs et sincères remerciements pour l'excellent travail accompli.

Et puisque la mathématique se veut ordonnée, je les citerai non pas par ordre d'importance (ce qui est très subjectif), mais bien par ordre alphabétique (ce qui est très logique) :

- **ARCHAMBEAU Pascale**
  Professeur de mathématique à l'Institut technique « Jean Jaurès » à Charleroi.

- **DEMAL Michel**
  Licencié en Sciences mathématiques (Université Libre de Bruxelles) et agrégé de l'enseignement secondaire supérieur (Université Libre de Bruxelles).

- **DRAMAIX Michel**
  Collaborateur administratif au Parlement wallon.

- **DUMONGH Jacques**
  Conseiller pour l'enseignement. Groupe socialiste. Parlement de la Communauté française.

- **GASSNER Marjorie**
  Professeur de mathématique à la Faculté des Sciences sociales, politiques et économiques de l'Université Libre de Bruxelles.

- **GOISSE Nicole**
  Professeur de mathématique préretraitée de l'Athénée Royal de Pont-à-Celles.

- **HABRAN Louis**
  Inspecteur principal honoraire dans l'enseignement de la Communauté française.

- **MASSARD Nicole**
  Inspectrice principale dans l'enseignement communal – canton de Bruxelles.

- **POPELER Danielle**
  Institutrice primaire – Détachée auprès de la Formation en cours de carrière de la Communauté française de Belgique.

- **VANEX Joëlle**
  Professeur de mathématique à l'Athénée Royal de Marcinelle.

- **VAN HOOSTE Christian**
  Professeur de mathématique à l'Athénée Royal « Vauban » de Charleroi.

Encore merci et bravo à toutes et à tous.

BIBLIOGRAPHIE

- **E. ARTIN**, Algèbre géométrique, Gauthier-Villars, Paris, 1972.
- **F. BORCEUX**, Invitation à la géométrie, Ciaco Editeur, 1986.
- **C. BOUCKAERT**, Some aspects of transformation geometry in primary school according to **Michel DEMAL** - UREM, Université Libre de Bruxelles, Belgium, 10 March 2004.
- **J.-S. BRUNER**, The process of education, Cambridge, Harvard, 1960.
- **F. BUEKENHOUT**, Goals of geometry teaching based on the spiral principle, Colloque international sur l'enseignement de la géométrie, Ed. G. Noël, Mons, 1982, p. 7-21.
- **F. BUEKENHOUT**, Les démonstrations : une vision génétique et en spirale, Congrès de la Société Belge des Professeurs de Mathématique, Morlanwelz, 1999.
- **E. CASTELNUOVO, M. BARRA**, La mathématique dans la réalité, Adaptation de José MARIA, C.E.D.I.C., Paris, 1982.
- **B. CHARLOT**, La validation des concepts et de l'activité mathématique, Dialogue, Groupe Français d'Education Nouvelle, n° 54 bis, 1985, p. 5-7.
- **H.-M. CUNDY et A.-P. ROLLET**, adapté de l'anglais par Pierre GAGNAIRE, Modèles mathématiques, C.E.D.I.C., Paris, 1978.
- **P. DANBLON** et les membres de la Commission scientifique sur l'enseignement des mathématiques et des sciences, Perspectives sur l'enseignement des mathématiques dans la Communauté française de Belgique, Ministère de l'Education, Bruxelles, 1990.
- **M. DEMAL**, Géométrie des transformations à l'école primaire, Collection « Documents du CREM », n°7, janvier 1998.
- **M. DEMAL et D. POPELER**, Géométrie des transformations et raisonnement dès l'enseignement fondamental, U.V.G.T. - juin 2004.
- **J. DIEUDONNE**, Panorama des mathématiques pures. Le choix bourbachique, Ed. Jacques GABAY, 1977.
- **F. ENRIQUES**, Philosophie et histoire de la pensée scientifique, Hermann, Paris, 1932.
- **N. ETIENNE**, La géométrie des transformations à l'école, mémoire de licence en Sciences mathématiques, U.L.B., Bruxelles, juin 1995.
- **H. FREUDENTHAL**, Mathematics as an educational task, D. Reidel, Dordrecht, 1973.

- **G. GOLDFARB et J. THEPOT**, Les Sciences, La grande encyclopédie Alpha des Sciences et des Techniques, Les mathématiques, n° 133, Editions Atlas, Paris, 1976, p. 5-6.

- **G.-H. HARDY**, Godfrey Harold Hardy, L'apologie d'un mathématicien, Ed. BELIN, 1985.

- **HOLDEN**, Formes, espaces et symétries, C.E.D.I.C., Paris, 1977.

- **MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE**, Organisation des Etudes, Les isométries de l'espace, Documentation 71, Bruxelles, 1987.

- **P. PASCAL**, Oeuvres complètes, Editions du Seuil, Paris, 1963, p. 349.

- **C. PERELMAN**, Logique et morale, Presses Universitaires de Bruxelles, 1969.

- **J. PIAGET, B. INHELDER et A. SZEMINSKA**, La géométrie spontanée de l'enfant, Presses Universitaires de France, Paris, 1973.

- **H. POINCARE**, La science et l'hypothèse, ch.1, Flammarion, Paris, 1968, p. 31-32.

- **G. POLYA**, Les mathématiques et le raisonnement plausible, Gauthier-Villars, Paris, 1958.

- **B. SENECHAL**, Groupes et géométries, Hermann, Paris, 1982.

- **I. STENGERS**, Souviens-toi que je suis Médée, Paris, les empêcheurs de penser en rond, 1993.
- **J. TITS**, Mathématique et Arts, Conférence à la Société des Sciences et des Lettres, Mons, 1983.
- **F. ULMER**, On liouvillian solutions of linear differantial equations, 1992.

- **H. WEYL**, Symétrie et mathématique moderne, Flammarion, Paris, 1964.

- **E. WITTMANN**, Grundfragen des Mathematik Unterrichts, Braunschweig Vieweg., 1980.

- **E. WITTMANN**, Teaching units as the integrating core of mathematics education, Education Studies in Mathematics, nr 15 (1), 1984, p. 25-26.

- **E. WITTMANN**, Fundamental ideas of elementary geometry as a basis for curriculum development, Nivelles, 1994.

- **E. WITTMANN**, Géométrie élémentaire et réalité, Didier Hatier, traduit par C. BOUCKAERT et M. CITTA-VANTHEMSCHE.

- Site de géométrie des transformations : **www.uvgt.net**