

La Géométrie des Transformations dans l'apprentissage des mathématiques

Evolution de l'application des transformations du plan de la Classe Maternelle à la sixième année Primaire

Avant propos

La géométrie où les transformations sont des outils pour découvrir et/ou justifier les propriétés des objets géométriques s'appelle la Géométrie des Transformations.

Cette géométrie qui relie les transformations à l'étude des objets géométriques est soulignée dans les Socles de Compétences.

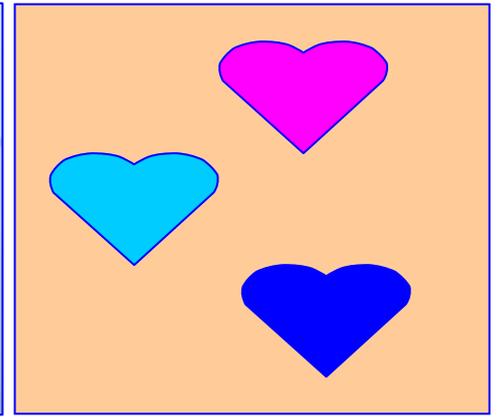
Le cours a été élaboré avec la collaboration de nombreux **enseignants de terrain** du Primaire et des deux premières années du Secondaire.

La structure théorique proposée s'appuie, tant dans le plan que dans l'espace, sur les définitions naturelles des isométries ("*Permutations qui conservent les distances*") et des similitudes ("*Permutations qui multiplient les distances par un réel strictement positif*"). Cette vision s'écarte donc de la structure théorique ancienne qui faisait appel aux composées de symétries orthogonales pour définir les isométries et les composées d'isométries avec des homothéties pour définir les similitudes.

La distinction en géométrie plane entre les déplacements et les retournements, les similitudes déplacées et les similitudes retournées se fait en utilisant l'orientation du plan via les types de dessins de mains ou des cercles orientés.

En classe maternelle

- Comparaison et tri de photos déformées et de photos non déformées.
- Reconnaissance de figures semblables ou proportionnelles (réduites, agrandies, isométriques).
- Par superposition d'un dessin isométrique à un modèle de référence sur transparent, sélection de figures isométriques.
- Par l'intermédiaire de transparents, découverte de figures isométriques superposables :
 - ✓ par déplacement
 - ✓ par retournement
 - ✓ par déplacement et aussi par retournement



- Réalisation de frises collectives et individuelles.



- Compléter des paysages déplacés avec les éléments correspondants.



Avant



Après



- Compléter, avec les éléments correspondants, des paysages qui se sont agrandis .



- Compléter, avec les éléments correspondants, des paysages qui se sont réduits.



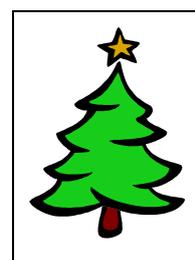
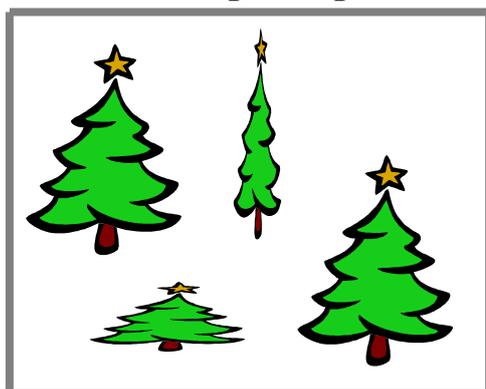
- Initiation aux automorphismes par la superposition d'un carré à lui-même.



En première année

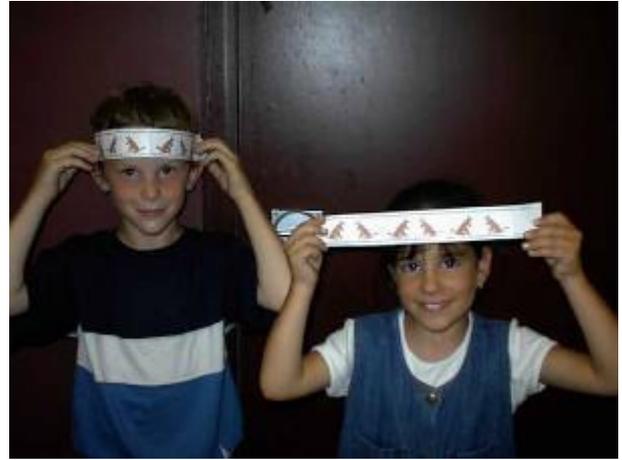
a) Idem classe maternelle mais avec d'autres figures.

- Comparaison et tri de photos déformées et de photos non déformées.
- Reconnaissance de figures semblables ou proportionnelles (réduites, agrandies, isométriques).
- Par superposition d'un "modèle" sur transparent, sélection des figures isométriques au modèle de référence.
- Par l'intermédiaire de transparents, découverte des figures isométriques superposables :
 - ✓ par déplacement
 - ✓ par retournement
 - ✓ par déplacement et aussi par retournement



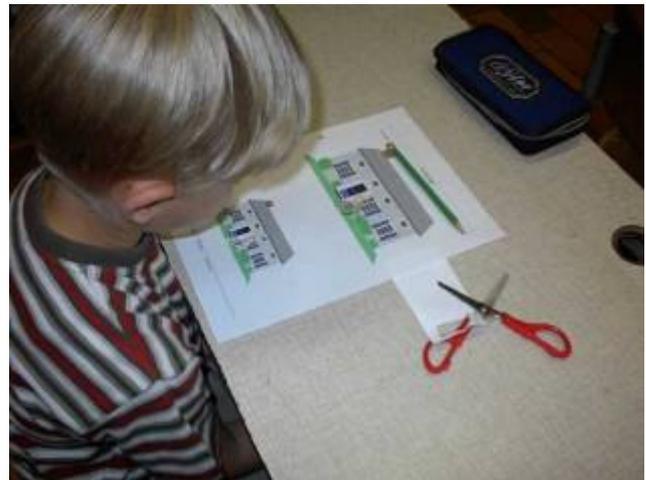
b) Notion de frise

- Construction de deux frises du type translation
- Nombres entiers et frises
- Construction de deux frises possédant des axes de symétrie verticaux



c) Déplacements de paysage

- tous les éléments qui le composent se déplacent en même temps



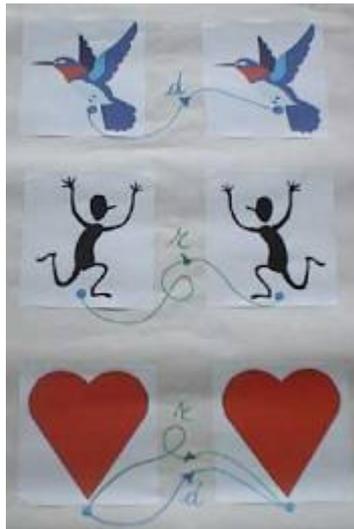
- Agrandissement et/ou réduction de paysage (à reconnaître; à compléter)

En deuxième année

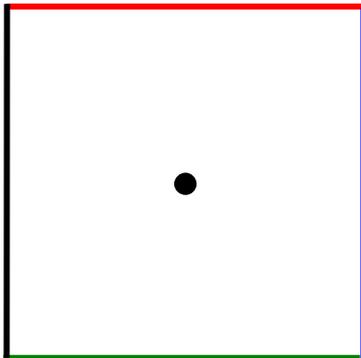
a) Idem première année à propos des figures superposables.

b) En plus:

- Figures géométriques superposables:
 - ✓ uniquement par déplacement;
 - ✓ uniquement par retournement;
 - ✓ par déplacement et aussi par retournement.

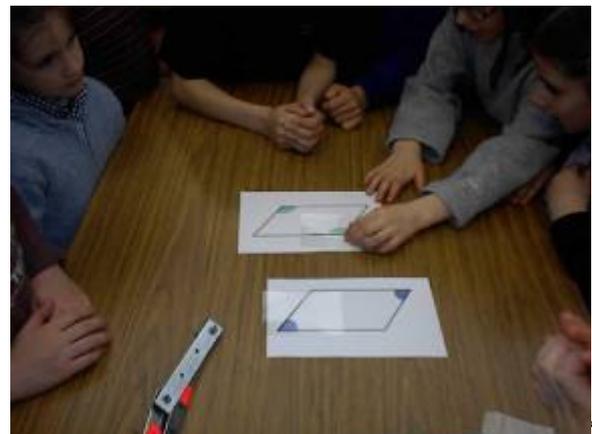
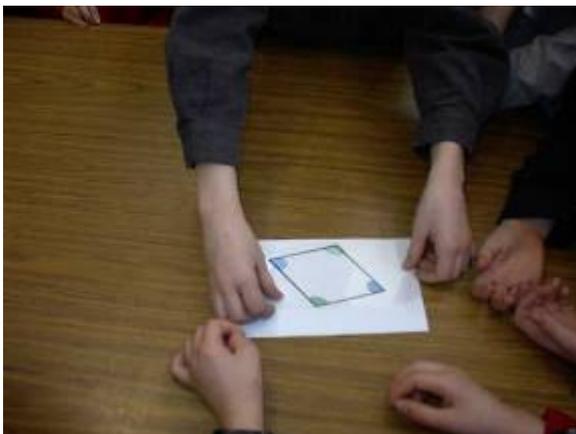


- Utilisation des automorphismes pour justifier des propriétés.



Côtés isométriques

Angles isométriques

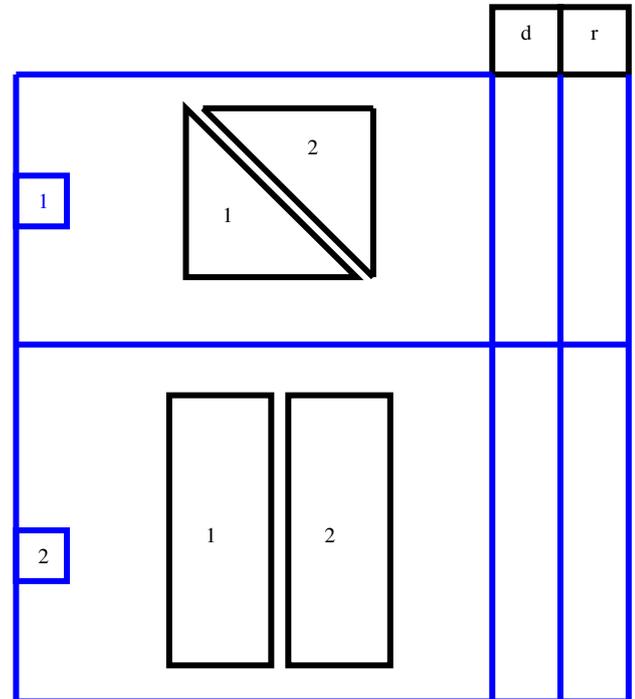


- Réalisations de frises avec des figures géométriques:
 - ✓ frises du type: translations.
 - ✓ frises du type: translations et admettant des axes de symétrie verticaux.

En troisième année

- Idem deuxième année.
- En plus:
 - Exercices individuels avec transparents: comparaisons des transformations du plan (avant-après) de figures géométriques (d et/ou r).

Exemple:



- Reproduction sur quadrillage de polygones isométriques déplacés ; reproduction sur quadrillage de figures géométriques semblables agrandies déplacées ou réduites déplacées .
- Utilisation des automorphismes pour justifier des propriétés des familles de figures géométriques (voir l'évolution des familles de quadrilatères).

Automorphismes: Tous les carrés sont superposables à eux-mêmes par déplacement et aussi par retournement.

- Frises
 - ✓ frise du type « translations et symétries glissées »: découverte collective puis construction individuelle.



- ✓ frise du type « translations et symétries centrales »: découverte collective puis construction individuelle.

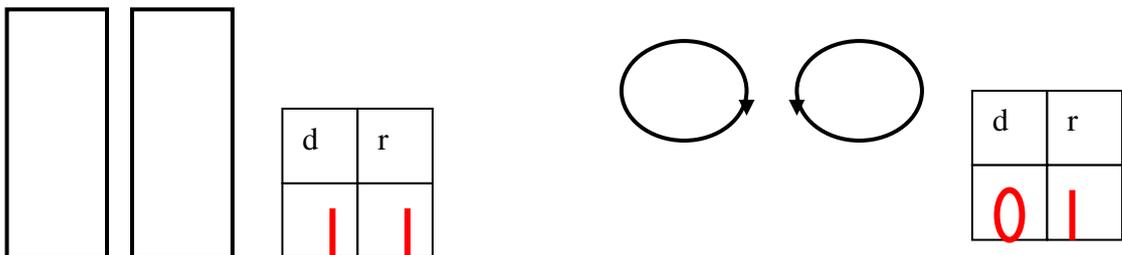
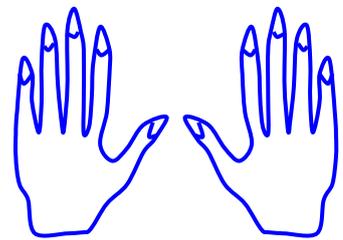


En quatrième année

a) Idem troisième année.

b) En plus:

- Figures superposables (isométriques) par déplacement et /ou par retournement - notion d'orientations du plan (dessins de main gauche, dessin de main droite, sens horlogique et sens antihorlogique).



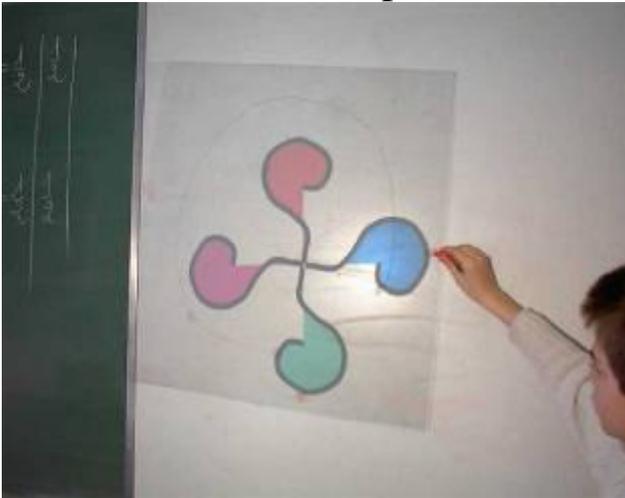
- Utilisation des automorphismes pour justifier des propriétés des familles de figures géométriques (voir l'évolution des familles de quadrilatères).

Automorphismes:

Tous les carrés sont superposables à eux-mêmes par 4 déplacements et aussi par 4 retournements.

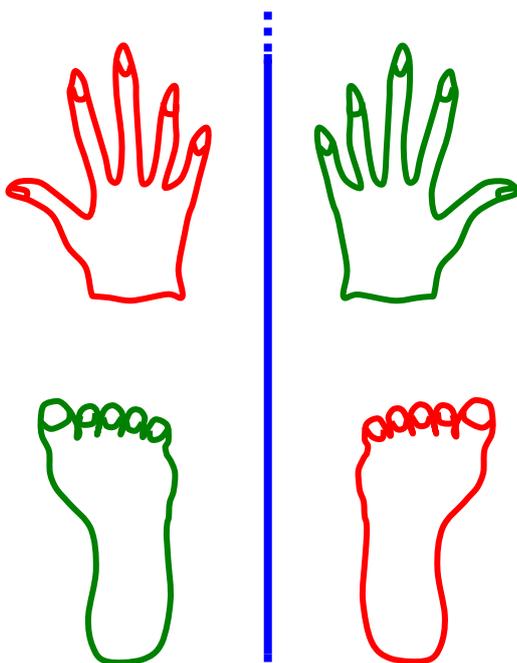
- Les rotations du plan
 - ✓ Rosaces et rotations (approche visuelle).

- ✓ Premières caractéristiques liées aux rotations (déplacements – amplitudes de la rotation - sens de la rotation – centre de la rotation « point fixe »).



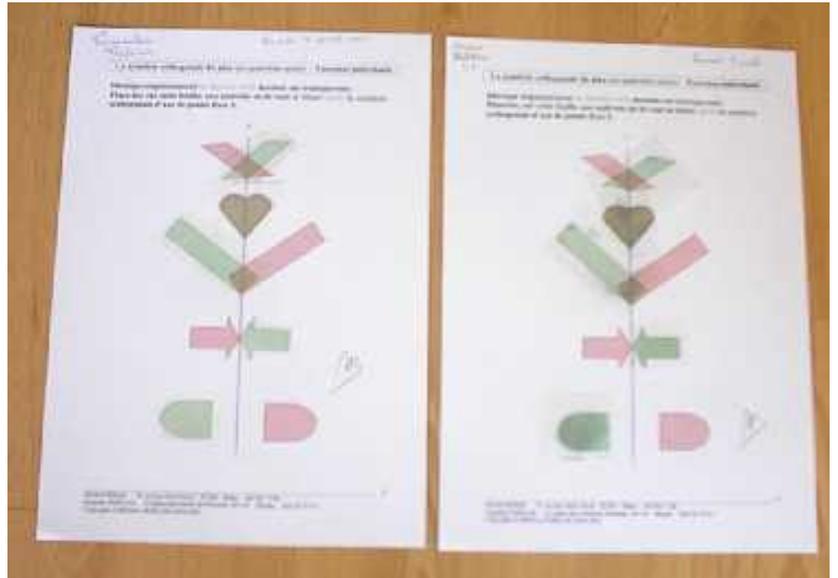
- ✓ Positionnement approximatif de figures (sur transparents) par des rotations données.
- Les symétries orthogonales du plan
 - ✓ Symétries orthogonales (approche visuelle).
 - ✓ Premières caractéristiques liées aux symétries orthogonales (retournement – inversion de l'orientation - droite de points fixes – « perpendiculaires – mêmes distances »).

« Figures vertes = images des figures rouges par la symétrie orthogonale plane d'axe bleu ».



A propos des symétries orthogonales planes et du pliage, voir les remarques en fin de programme de quatrième année primaire. Le pliage d'une feuille de papier n'illustre pas la notion de symétrie orthogonale plane.

- ✓ Image d'un point par une symétrie orthogonale donnée.



- ✓ Positionnements approximatifs de figures (sur transparents) par des symétries orthogonales données.

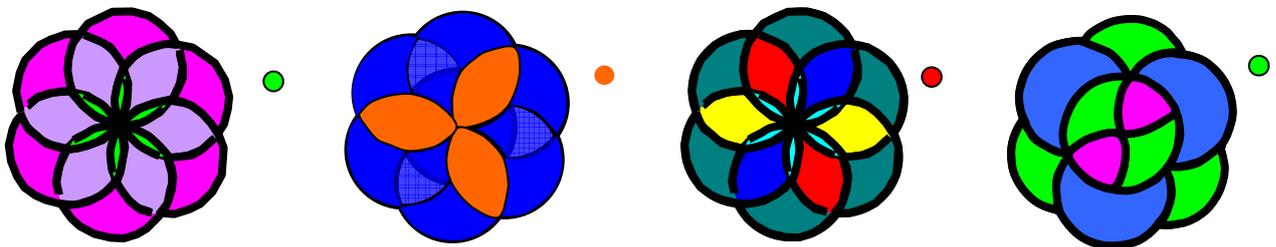
- Utilisation des automorphismes pour justifier des propriétés des familles de figures géométriques (voir l'évolution des familles de quadrilatères).

Automorphismes:

Tous les carrés sont superposables à eux-mêmes par 4 rotations ($1/4, 2/4, 3/4, 4/4$ de tour) et aussi par 4 symétries orthogonales (d_1, d_2, m_1, m_2).

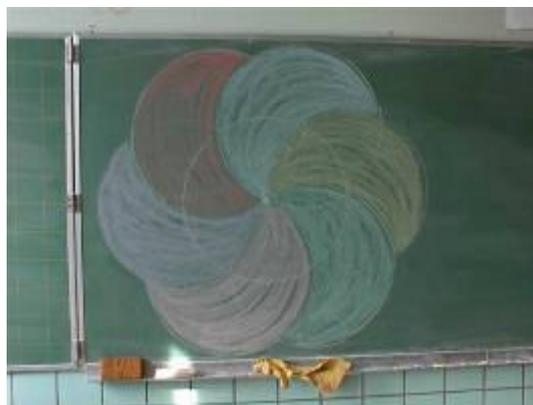
- Les rosaces

- ✓ Rechercher les rotations qui superposent des rosaces à elles-mêmes.



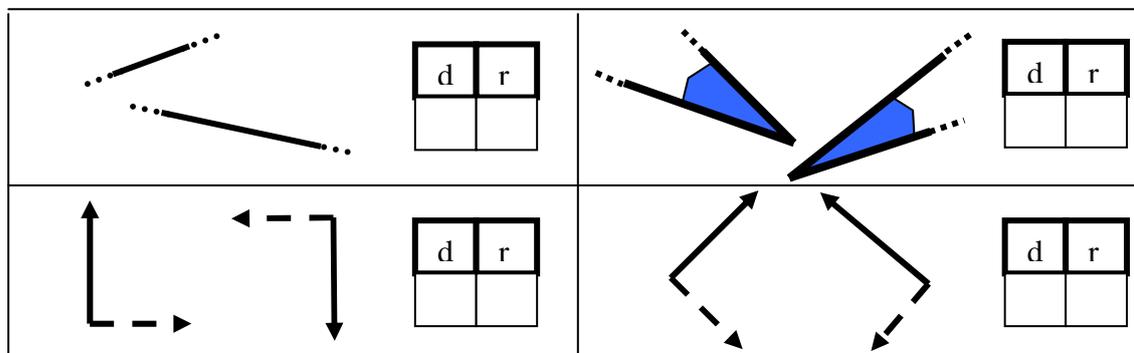
- ✓ Colorer des rosaces en tenant compte des contraintes imposées.

- ✓ Construire, aux instruments, des rosaces d'après des procédés imposés.
- ✓ Créer des rosaces différentes par le choix et la régularité des coloriages.

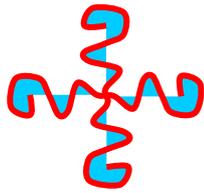


En cinquième année

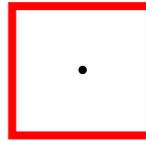
- a) Idem quatrième année.
- b) En plus:
 - Déplacements et/ou retournements du plan



- Figures superposables à elles-mêmes par déplacement(s) et /ou par retournement(s) du plan



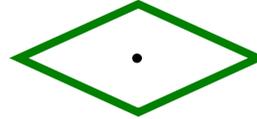
d	r
I	O



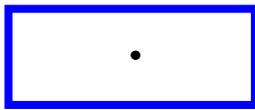
d	r
I	I



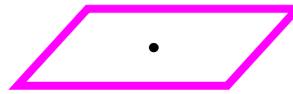
d	r
I	I



d	r
I	I



d	r
I	I



d	r
I	O



d	r
I	I



d	r
I	I

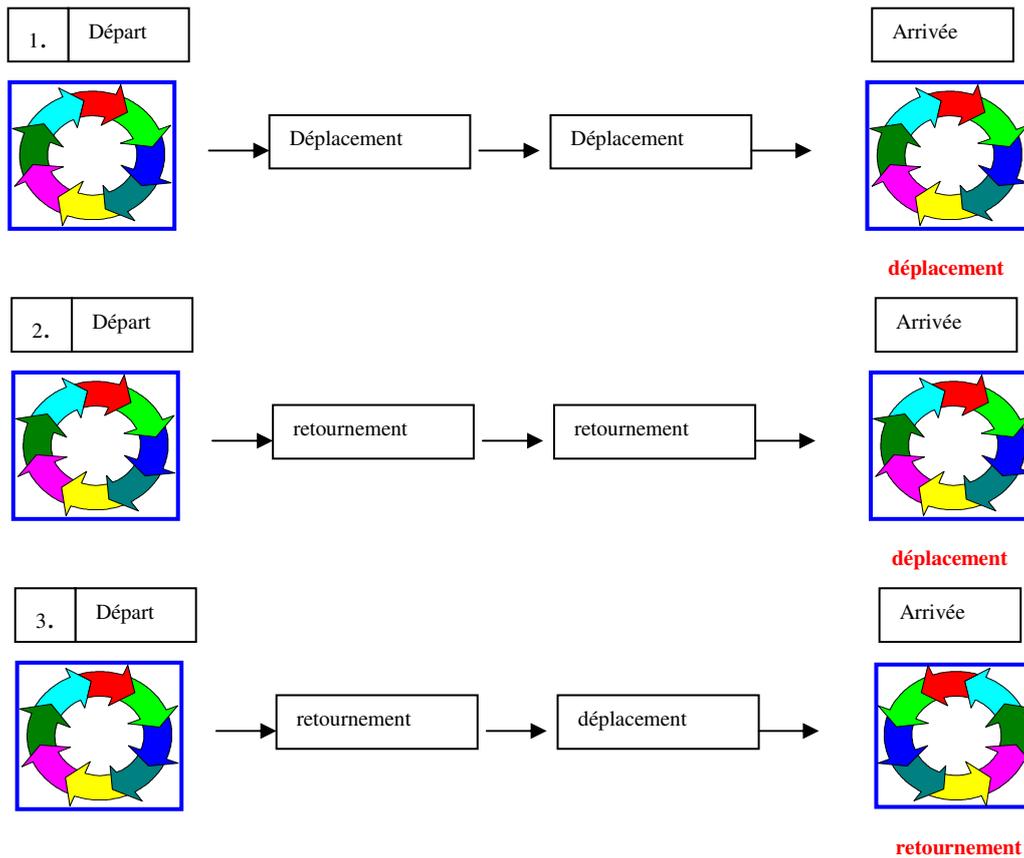
- Notions conservées par les déplacements et les retournements du plan

Les deux orientations du plan (rappel) :

- ✓ sens horlogique et sens antihorlogique
- ✓ dessin d'une main gauche et dessin d'une main droite

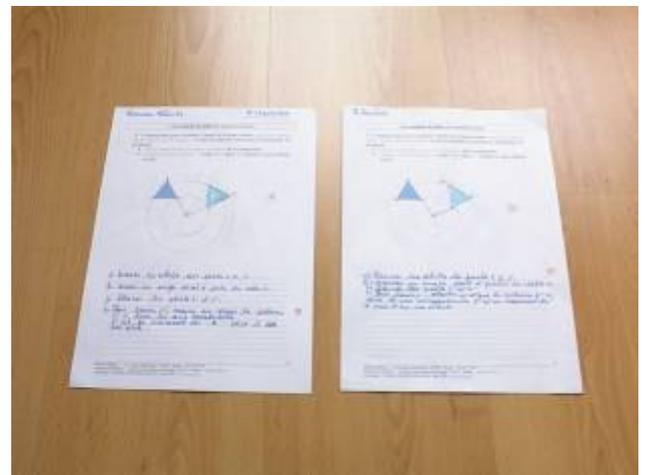
Les premières notions conservées par un déplacement du plan et par un retournement du plan (comparer ce qui varie et ce qui ne varie pas)

- Compositions (paires ou impaires) de déplacements et/ou de retournements du plan



▪ Déplacement particulier du plan: Les rotations

- ✓ Rotations dans le sens horlogique ou antihorlogique.
- ✓ Mesure d'angle d'une rotation.
- ✓ Représentations (aux instruments) d'un modèle donné après une rotation imposée.
- ✓ Recherche de l'orbite de points distincts.
- ✓ Recherche de l'image d'une droite après une rotation de 90° (image perpendiculaire).



- ✓ Recherche de l'image d'une droite après une rotation de 180° (image parallèle).
- Retournement particulier du plan: Les symétries orthogonales (Notions conservées ou non conservées par les déplacements et par les retournements du plan).
- ✓ Par retournement du plan autour d'une droite de points fixes, comparaison des images: "avant" et "après".

- ✓ Représentation, aux instruments, de dessins après une symétrie orthogonale du plan.



- ✓ Compositions de symétries orthogonales.
- ✓ Ajuster la droite de points fixes d'une symétrie orthogonale de manière à ce qu'elle "devienne" l'axe de symétrie d'une figure géométrique.
- ✓ Déterminer le milieu d'un segment.

- Médiannes et diagonales des quadrilatères

- ✓ Tracer les médianes et les diagonales des quadrilatères.
- ✓ Rechercher quels sont les axes de symétrie des quadrilatères.



- Utilisation des automorphismes pour justifier des propriétés des familles de figures géométriques (voir l'évolution des familles de quadrilatères).

Automorphismes:

Les carrés sont superposables à eux-mêmes par 4 rotations (90° , 180° , 270° , 360° dans le sens horlogique ou dans le sens antihorlogique) et aussi par 4 symétries orthogonales (d_1 , d_2 , m_1 , m_2).

- Les frises
 - ✓ Réalisation de frises du type: déplacements et symétries glissées.
 - ✓ Travail collectif puis travaux individuels.



En sixième année

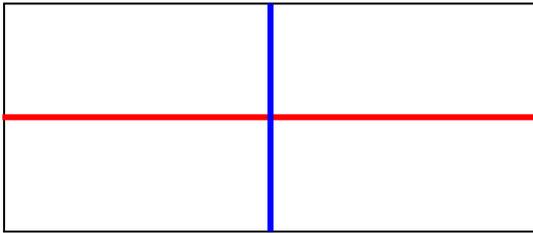
a) Idem cinquième année.

b) En plus:

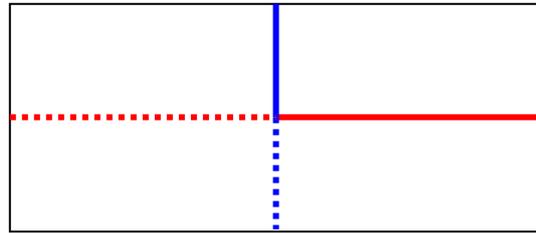
- Positions relatives de deux droites: parallélisme et perpendicularité.
- Recherche de symétries orthogonales possibles dans des figures (ou axes de symétrie de ces figures).
- Recherche de l'orbite d'un point dans un carré, par les automorphismes du carré (ses rotations et ses symétries orthogonales).
- Milieu d'un segment de droite.

- Segments de droite se coupant en leur milieu.

Modèle de départ



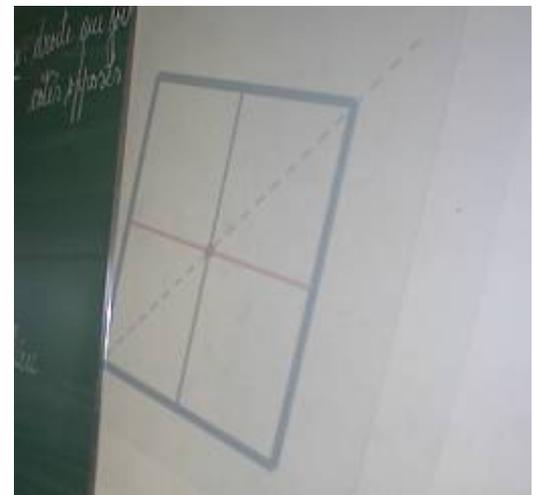
Modèle à superposer



Vérification par
une rotation de 180°

- Propriétés des médianes et des diagonales des quadrilatères:

- ✓ *Des carrés*
- ✓ *Des rectangles quelconques*
- ✓ *Des losanges quelconques*
- ✓ *Des parallélogrammes quelconques*
- ✓ *Des trapèzes quelconques*
- ✓ *Des quadrilatères quelconques du type: cerfs-volants*
- ✓ *De tous les quadrilatères repris ensuite "famille par famille"*



Sont-elles de même longueur?
Se coupent-elles en leur milieu?
Sont-elles perpendiculaires?
Sont-elles des axes de symétrie ?
(Vérification à l'aide des transformations)

- Utilisation des automorphismes pour justifier des propriétés des familles de figures géométriques (voir l'évolution des familles de quadrilatères).

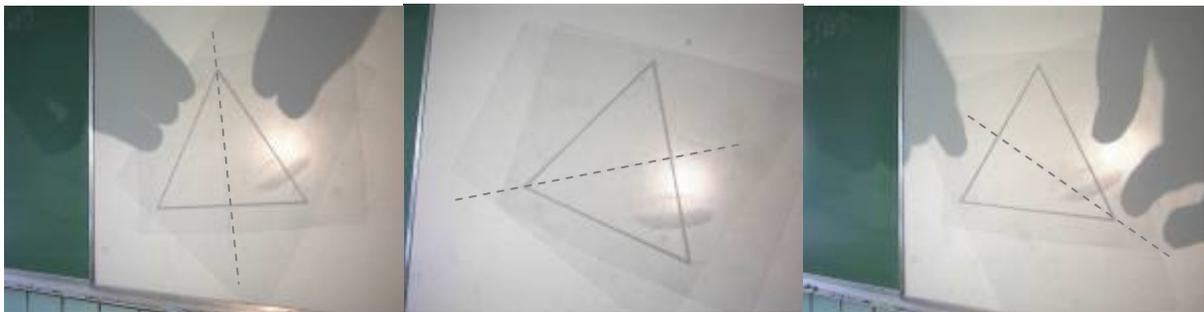
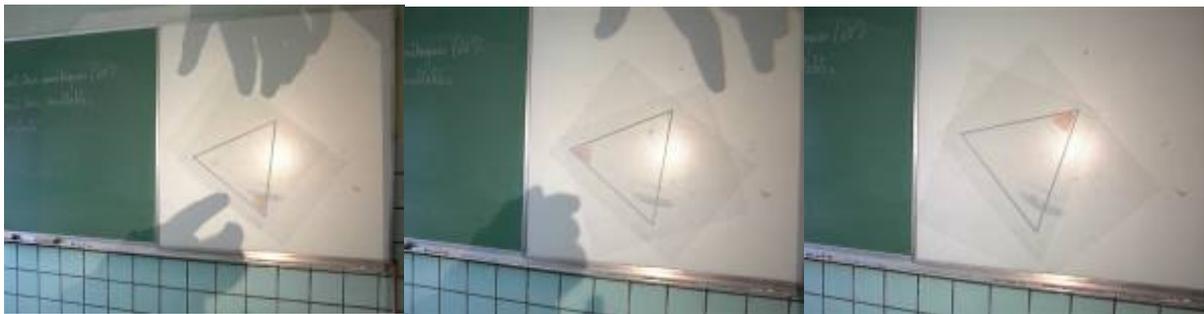
Automorphismes:

Tous les carrés sont superposables à eux-mêmes par 4 rotations (90° , 180° , 270° , 360° dans le sens horlogique ou dans le sens antihorlogique) et aussi par 4 symétries orthogonales (d_1 , d_2 , m_1 , m_2).

Tous les carrés possèdent 4 axes de symétrie: les deux diagonales et les deux médianes.

- Recherche des transformations permettant de superposer chaque type de triangle à lui-même.

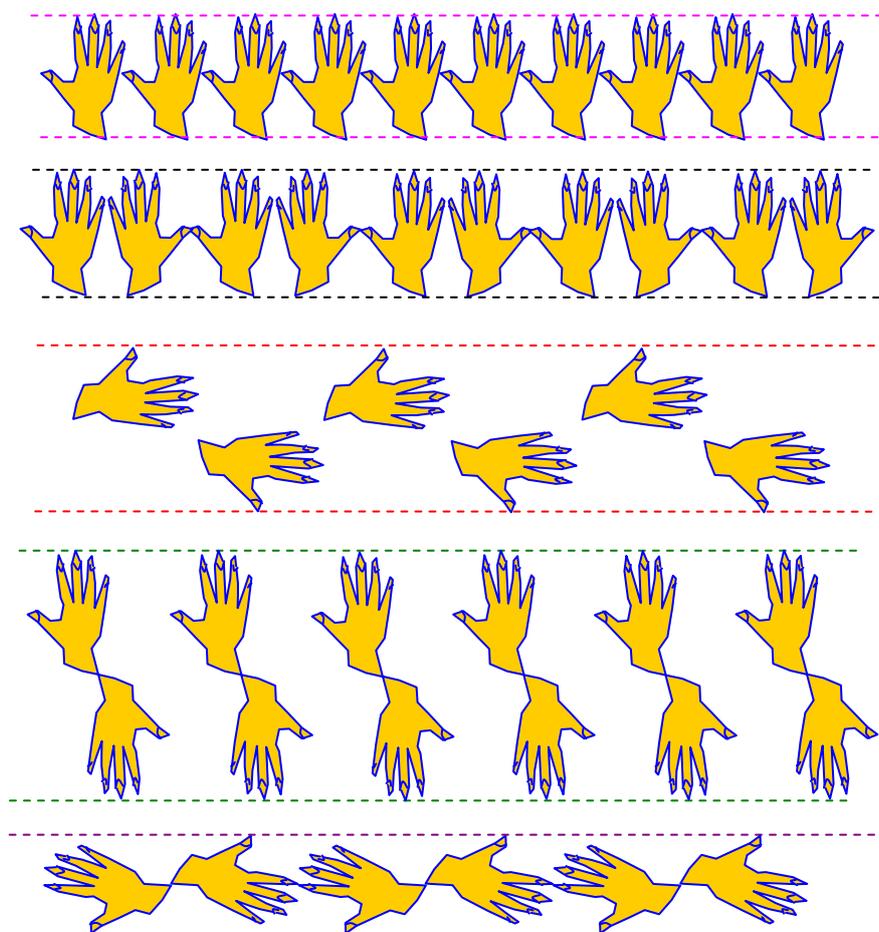
Exemples:



■ Frises

Réinvestissement des acquis: reconnaissance des types de frises donnés (à l'aide de dessins sur transparents et par superposition); soit:

- ✓ Uniquement des translations (déplacements parallèles);
- ✓ Des rotations (déplacements qui tournent autour de centres);
- ✓ Des symétries orthogonales (retournements selon des axes de points fixes);
- ✓ Des symétries glissées (symétries orthogonales + translations).



- ✓ Réalisation de frises individuelles selon des modèles imposés.

